中国数学史大系

第八卷　清中期到清末

国家"八五"重点图书规划项目

吴文俊　主编

北京师范大学出版社

ZHONGGUO SHUXUESHI DAXI



中国数学史大系

责任编辑 王松浦
封面设计 李葆芬






ISBN 7-303-05291-7
9 787303 052912 >

ISBN 7-303-05291-7/O·232
定价：45.00 元

国家“八五”重点图书规划项目

中国数学史大系

吴文俊 主编

本卷主编 李兆华

第八卷 清中期到清末

北京师范大学出版社

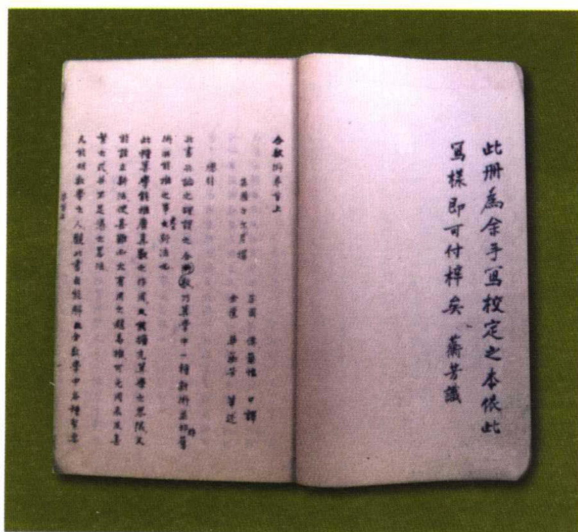
图书在版编目(CIP)数据

中国数学史大系. 第8卷,清中期到清末/吴文俊主编;李兆华编. —北京:北京师范大学出版社,2000.4
ISBN 7-303-05291-7

Ⅰ.中… Ⅱ.①吴… ②李… Ⅲ.数学史—中国—清代 Ⅳ.O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 09162 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京东方圣雅印刷有限公司印刷 全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm 1/32 彩插:2 页 印张:12.875 字数:323 千字
2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷
印数:1～5000 定价:45.00 元



《合数术》稿本
（李迪藏书）



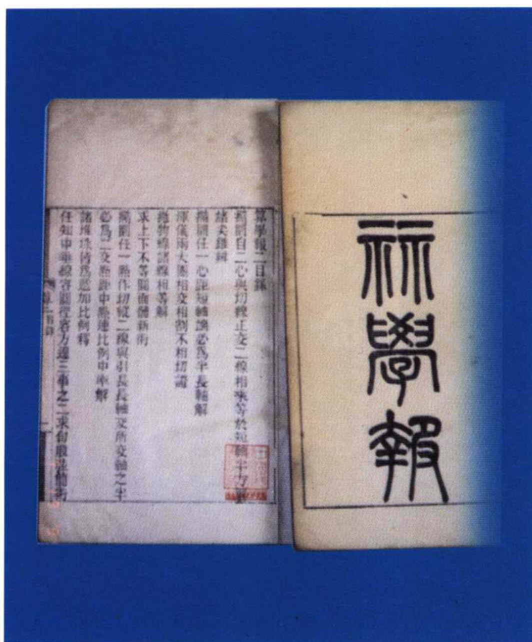
《衡斋算学》、《开方说》、《象数一原》、《垛积比类》



《代微积拾级》、《代数学》、《决疑数学》



黄庆澄编《算学报》（1897年，自然科学史所藏书）



朱宪章 等编《算学报》(1899年，自然科学史所藏书)



浏阳算学馆(许康提供)



第四届全国数学史学会常务理事（左起王青建、张奠宙、郭书春、李迪、李文林、王渝生、刘钝、李兆华，1994，北京香山）

序

1984年间，四位中国数学史的专家教授，倡议缮写一部全面论述中国传统数学历史发展的巨大著作，取名为《中国数学史大系》，这四位教授（以年事为序）是：

北京师范大学的白尚恕教授；

杭州大学的沈康身教授；

内蒙古师范大学的李迪教授；

西北大学的李继闵教授。

中国传统数学源远流长，有其自身特有的思想体系与发展途径，从远古以至宋元，在很长一段时间内成为世界数学发展的主流，但自明代以来，由于政治社会等种种原因，特别如明末徐光启所指出的那样，一方面“名理之儒，土苴天下之实事”，另方面“妖妄之术，谬言数有神理”，致使中国传统数学濒于灭绝，以后全为西方欧几里得传统所凌替以至垄断，虽然康乾之世曾有一度重视，但仅止于发掘阐释古籍而已，循至20世纪中叶，李俨、钱宝琮先生撰写中国数学史专门著作进行介绍，使中国古算得以不绝如缕。到70年代特别是改革开放以来，全国兴起了研习中国传统数学的高潮，论著迭出，仅就对《九章算术》与注者刘徽的各种形式的专著，就在10种以上，其它方面论著之多，更难以统计，这些研究使中国传统数学的固有特色，如构造性、机械化、以及离散型的算法形式

等，与西方欧几里得传统迥然异趣，得以贻然在目，甚至国外数学史家，也表示了对中国古算的浓厚兴趣，李约瑟的中国科技史巨著固不待论，此外还酝酿了《九章算术》与刘徽注的英文与法文编译，尤其值得一提的是：《九章算术》刘徽注中关于阳马术的一段术文，过去认为有脱漏舛误而难以理解。丹麦的 Wagner 先生却给予了正确的解释，使中国古算中一段辉煌成就，得以大白于世。虽然如此，目前国内大部分群众对中国数学的成就和发展情况了解仍嫌不足，已有的同类书籍却偏于某一侧面，不能满足现在教学、科研或其他方面的需求。已有的工作与我国的发展形势还不太相称，国际学术界也有较强烈的要求，希望有大型的中国数学史著作问世。《大系》的倡议，可谓来自这些对客观形势的分析，有鉴于客观上有此必要而来。《大系》全书是编年史，自上古以迄清末，共分八卷，各卷自成断代史，除复原古代算法的形式，并对照以近代算法外，将尽量收入各家最新研究成果，以期能对中国古代数学的发展情况与辉煌成就作一次较彻底的清理与研究，借以达到发扬成绩，总结规律，预见未来并服务于我国四化建设的目的。

《大系》在白、沈与二李等四位倡议与领导之下，有不少中算史的专家学者参与了写作，规模之宏，在国内外还从未见过，可谓首创。不幸的是：在写作过程中，李继闵教授于 1993 年因病逝世，白尚恕教授也于 1995 年因肺癌逝世。这影响了编写进程，使《大系》的写作不得不一再延期，原来的计划也作了某些局部修改，所幸赖写作者的积

极工作，以及北师大出版社的高度热情，第一部分一、二、三卷自上古以迄以刘徽为中心的三国时代，终于问世。在《大系》全书不久即可全部出齐之际，聊志数语，以示庆贺。

吴文俊

1997.12.25

第八卷前言

本卷论述清代中期至清代末期中国数学发展的情形。时间由乾隆三十七年开馆纂修《四库全书》至20世纪初期清代数学教育制度的结束，约一百三十余年。

本期中国数学发展的情形大致可以分为前后两个阶段。其中可以《代微积拾级》十八卷的翻译出版（1859）为断。其前一阶段,《算经十书》和宋元数学名著的整理与研究为中国传统数学的复兴奠定基础，继而出现了诸如焦循、汪莱、李锐等人为代表的杰出的数学家及其中国传统数学方面的优秀成果。另一方面，该阶段继承了康熙时代传入中国的对数求法和对数表造法、三角函数的幂级数展开式等知识，并予以深入系统的研究，出现了诸如董祐诚、项名达、戴煦、李善兰为代表的杰出的数学家及其近代数学领域的优秀著作。其后一阶段，李善兰、伟烈亚力译《代微积拾级》十八卷等书，华蘅芳、傅兰雅译《决疑数学》十卷（1880）等书，表明西方近代数学知识比较系统地传入中国。据统计，自咸丰三年（1853）至宣统三年（1911），共译西方数学著作164种，约占同期所译西方自然科学著作的三分之一，其中李氏、华氏之所译共十余种允称此期所译数学著作之典范。明末清初传入的西方数学知识，大体为摘译编述以入大统之型模，而李氏、华氏所译多为原著通译以求系统介绍。相比之下，其影响固不可同日而语。另一方面，西方数学及中国传统数学的研究仍多有成果出现。夏鸾翔关于二次曲线的研究，李善兰、华蘅芳关于垛积术

和素数的研究，时曰醇和黄宗宪关于百鸡术和求一术的研究皆为其例。在后一阶段中，数学教育是一值得注意的问题。鸦片战争之后，随着洋务运动的兴起，有别于官学的新式学堂出现，实学教育得到发展。中国传统的书院教育亦提出改革的要求，戊戌变法期间书院进一步改为兼习中学西学的学校。至20世纪初，壬寅学制、癸卯学制相继出现，中国传统教育制度已告解体。在教育变革的过程中，数学教育的地位与作用亦呈明显变化。此期的教学用书及算学课艺流传至今者尚有多种，是研究这一课题的有用史料。

自18世纪末至20世纪初，中国数学家积极挖掘中国传统数学成就并多所创新，努力引进西方数学知识且不乏研究成果，可谓东西兼采，发扬光大，实为中国数学史上一极为重要的时期。一般地说，此期总体的数学水平不如西方，而若干重要结果系独立创获且数学方法亦多特色则不容忽视。“学者精研虚受，各有创获，其于西来法，食而能化，足觇民族器量焉。”①

本卷执笔人如下：

侯钢　第一编，第四编第一章第一、二、三、七节，第四编第二章第四、五、七节。

李兆华　第二编。

徐泽林　第三编，第四编第一章第四、五、六节。

田　淼　第四编第二章第一、三节。

郭金海　第四编第二章第二、六节。

李　迪　清代后期研究论著分类文献。

因写作计划、执笔人选的变动，亦因本人杂务繁冗、脱身不易，致本卷之草成拖延数年之久。成书过程中，吾师李迪先生多次以书信、电话及面谈予以殷切督促，并亲自编写本卷论著分类

---

① 梁启超．清代学术概论．北京：东方出版社，1996，52

文献予以大力支持。北京师范大学出版社王文湧、潘淑琴二位先生亦多次促成早日完稿。师友之助，曷可少哉。北京师范大学白尚恕先生生前十分关心本书的写作，逝世前数日亲自电话叮嘱，“大系”一定要完成。事犹昨日，奈何永诀倏忽五载。抚今追昔，为之泫然。

李兆华

2000，1，20

目　录

第一编

传统数学著作的整理与研究

第一章　传统数学著作的整理

第一节　《四库全书》所收数学著作

编纂于18世纪后期的《四库全书》，是我国历史上规模最为宏大的一部丛书。全书收载籍三千四百余种，七万九千余卷①，有的是采自内府藏本，有的是采自藏书家的进献本，有的是《永乐大典》的辑本。此书修于清朝乾隆年间，其时清政府的统治达于全盛，文化相应繁荣，“汉学”兴盛，大批学者遵循汉儒训诂方法研治古籍。考据稽索，需要查阅群书以探本求源。在这种学术背景下，为了加强文化统治，清高宗便因势利导，“寓禁于征”，于乾隆三十七年(1772)下令全国征书，并正式设馆。次年又接受建议，从《永乐大典》中蒐辑遗籍，编纂《四库全书》。历年参加编纂工作的学者达三百余人，其中如纪昀、陆锡熊、戴震、邵晋涵、周永年、姚鼐等人，都在某一方面有所专长，因而保证了全书在选目、分类、辑补和撰写提要等方面的学术质量。至乾隆四十六

① 全书种数卷册，记载不一，此从通行约数。

年(1781)，全书始告完成。清政府编纂此书的目的在于“稽古右文”、炫耀文治，并乘机抽改禁毁以实行文化专制，而从总体看，该书毕竟汇集了在此之前的历代主要著作，整理和保存了大量历史文献和各方面知识的典籍。

《四库全书》编成后，先后共誊缮七部。先完成的四部分别贮藏于北京故宫的文渊阁(1781)、奉天(今之沈阳)故宫的文溯阁(1782)、北京圆明园的文源阁(1782)和热河(今之承德)避暑山庄的文津阁(1782)，是为北四阁，又称内廷四阁。后又完成三部，分别贮藏于镇江金山寺的文淙阁、扬州大观堂的文汇阁和杭州西湖圣因寺行宫的文澜阁(1787)，是为南三阁，又称江浙三阁。文源、文淙、文汇三阁的藏书，咸丰间毁于战乱。现存的文渊阁本、文溯阁本、文津阁本、文澜阁本分别藏于台湾、甘肃图书馆、中国国家图书馆、浙江图书馆。

《四库全书》内容包括学术文化的各个门类，凡政治、经济、军事、哲学、文学艺术、历史地理以及天文历法、算学、农业、医药等几乎应有尽有。它的分类按传统的经、史、子、集四大部加以细密化，共四十四类，其中有些类又分若干属。

《四库全书》子部第十七为天文算法类的“算书之属”，共25部，内有唐末以前书9部28卷，宋元书3部33卷，明代书4部27卷，清康熙末以前书9部119卷。又子部第十六为天文算法类的“推步之属”，共31部，大部分是天文学书籍，但也包含了一些数学著作。

《四库全书》所收数学著作如下。

《四库全书总目提要》[1]卷一百六，子部十六，“天文算法类一”及《四库全书简明目录》[2]卷十一，子部六，记录有：

① 永瑢等撰．中华书局影印浙江杭州本．1965

② 上海古籍影印台湾影印文渊阁本．1987

“周髀算经二卷、音义一卷(永乐大典本)　是书为相传古本，莫知谁作。其算法为勾股之祖，其推步即盖天之术，欧罗巴法实从此出。注为赵爽作，《隋志》作赵婴，未详孰是。《音义》为李籍作，原本舛讹，今据《永乐大典》所载宋本补脱字一百四十七，改误字一百一十三，删衍字一百一十八，补图二。”

“测量法义一卷、测量异同一卷、勾股义一卷(两江总督采进本)　明徐光启撰。《测量法义》因利玛窦所译而衍之，首造器、次论景、次设问十五题，以明测望之法。《测量异同》皆取古法九章勾股测量与新法相较，以测量仅勾股之一端，故以专言勾股之义者别为一卷焉。”

“圜容较义一卷(两江总督采进本)　明李之藻撰，亦利玛窦之遗法也。自序谓昔从利公研穷天体，因论圜容，拈出一义。次为五界十八题，借平面以推立圜，设角形以征浑体云云。盖其法从四周取一面，即从一面以例四周；割圜形为众角，即合众角以成圜形也。”

“历算全书六十卷(浙江汪启淑家藏本)　国朝梅文鼎撰。文鼎历算之法，近世推为绝学，受知于圣祖仁皇帝，有‘积学参徼’之御题。此编汇集其历算之书凡二十九种。”

“算学八卷续一卷(安徽巡抚采进本)　国朝江永撰。是编因梅文鼎《历算全书》为之发明订正，一准《御定历象考成》，折中其异同，踵事而增，愈推愈密，可与文鼎书相辅而行。”

《四库全书总目提要》卷一百七，子部十七，“天文算法类二”及《四库全书简明目录》卷十一，子部六，又记录有：

“九章算术九卷(永乐大典本)　不著撰人名氏。原本久佚，今从《永乐大典》录出。盖《周礼》保氏之遗法，汉张苍删补校正而后人又有所附益也。晋刘徽、唐李淳风皆为之注。自《周髀》以外，此为最古之算经。”

“孙子算经三卷(永乐大典本)　不著撰人名氏，疑汉、魏人所

述。或以为孙武作者，误也。原本讹缺，今从《永乐大典》校正。旧有甄鸾、李淳风注，今则佚矣。”

“数术记遗一卷(两江总督采进本)　旧本题汉徐岳撰、北周甄鸾注，《隋志》不著录。序中所言姓名、时代多与史传牴牾，注亦无所发明，疑为伪作。殆因唐代算学所肄有此书，遂袭其名而依托欤？流传已久，姑录以备一家焉。”

“海岛算经一卷(永乐大典本)　晋刘徽撰，唐李淳风注。原本久佚，今从《永乐大典》录出。其书本名《重差》，皆测望之术。唐代乃改称《海岛算经》，盖因第一条以海岛之表设问，遂以卷首之字名之耳。”

“五曹算经五卷(永乐大典本)　不著撰人名氏，以唐志[①]载有甄鸾注知书在北齐前矣。原本讹缺，今从《永乐大典》校补。其甄鸾、韩延、李淳风之注，则《永乐大典》亦佚之。”

“五经算术二卷(永乐大典本)　北周甄鸾撰，唐李淳风注。原本久佚，今从《永乐大典》录出。名为五经，而书中举《易》、《书》、《诗》、《三礼》、《春秋》、《孝经》、《论语》中待算方明者列之，实则九经也。所引经文皆据古本，尤足以考异订讹。”

“夏侯阳算经三卷(永乐大典本)　旧本题夏侯阳撰，时代未详。唐志载有甄鸾注，则北周以前人也。原本久佚，今从《永乐大典》录出。凡十有二门。其法务切实用，虽九章古法、非官曹民事所必需者，亦略而不载，于古算经中最为简要。”

“张丘建[②]算经三卷(吏部侍郎王杰家藏本)　旧本题张丘建撰，不著时代。序中引及夏侯阳，则犹在阳后也。其本乃毛晋汲古阁从宋椠影抄。首题甄鸾注、李淳风注释、刘孝孙撰细草，盖犹北宋秘书监赵彦若等校本。其体例皆设为问答，参较申明，条

---

① 唐志即旧唐书卷 47 经籍志（下）。

② “张丘建”亦有书记载为“张邱建”。

理精密，文词亦简奥古雅。”

“缉古算经一卷（吏部侍郎王杰家藏本）　唐王孝通撰并自注。志称李淳风注，误也。大旨以九章商功篇有平地役功受袤之术，于上宽下狭、前高后卑，阙而不论，因设二十术以明之。文词隐奥，猝不易通，而细研之具有端绪。”

“数学九章十八卷（永乐大典本）　宋秦九韶撰。原本久佚，今从《永乐大典》录出。其书虽以‘九章’为名而别立九目，与古《九章》迥别。其法虽不尽精密，而‘大衍术’中所载‘立天元一法’为郭守敬、李冶所本。欧罗巴之借根法至为巧妙，亦从此出也。”

“测圆海镜十二卷（编修李潢家藏本）　元李冶撰。其书以勾股容圆为题，自圆心、圆外纵横取之，得大小十五形，皆无奇零。次列‘识别杂记’数百条以穷其理。次设问一百七十则以尽其用。所演秦九韶‘立天元一法’为唐顺之、顾应祥等所不解，则精妙可知矣。”

“测圆海镜分类释术十卷（浙江范懋柱家天一阁藏本）　明顾应祥撰。应祥得李冶之书于唐顺之，而不得其立天元一之解，遂去其细草、专演算法，改为此书，殊失冶之本意。然乘方之法不明，亦难以遽求其根本。应祥所演于读冶书者不为无助也。”

“益古演段三卷（永乐大典本）　元李冶撰。原本久佚，今从《永乐大典》录出。冶以某氏所作《益古集》（案：是书冶亦不知谁作，故原序但称曰某），以方圆周径幂积和较相求为诸法，而秘其要旨不肯言，因为移补条目、厘定图式，演为六十四题，以畅明其义，大旨亦借以明立天元一法。”

“弧矢算术一卷（浙江范懋柱家天一阁藏本）　明顾应祥撰。弧矢之法始于元郭守敬《授时历草》，亦本于立天元一法。应祥得其书而不得其立法之本，故惟补开带纵三乘方式及各弧矢相求术，其失与改《测圆海镜》等，其可谓初学门径，功亦略同。”

“同文算指前编二卷通编八卷（两江总督采进本） 明李之藻演利玛窦所译法也。《前编》言笔算定位、加、减、乘之式及约分、通分之法。《通编》则以西术易九章，分十六目。其论三率比例较古法‘方田’、‘粟米’、‘差分’为详，‘少广’则略而未备。‘盈朒’、‘方程’，梅文鼎谓之藻取古法以传之，非利氏本意。存之，亦见古法、西法互有短长也。”

“几何原本六卷（两江总督采进本） 西洋欧几里得撰，利玛窦译，而徐光启所笔受也。其书为欧罗巴算学之祖，原本十五卷，光启刊其最要者六卷。卷一论三角形，卷二论线，卷三论圆，卷四论圆内外形，卷五、卷六俱论比例。”

“御制数理精蕴五十三卷 康熙五十二年圣祖仁皇帝御定《律历渊源》之第三部也。上编五卷以立纲明体，曰数理本原、曰河图、曰洛书、曰周髀经解、曰几何原本。下编四十卷以分条致用，曰首部、曰线部、曰面部、曰体部、曰末部。又表八卷，其别有四：曰八线表、曰对数阐微表、曰对数表、曰八线对数表。通中西之异同，殚天人之微奥，自隶首以来，咸未窥斯秘也。”

“几何论约七卷（内府藏本） 国朝杜知耕撰。是书取徐光启所受《几何原本》重为删削，故名曰《论约》。末附十题则又知耕所推衍也。”

“数学钥六卷（内府藏本） 国朝杜知耕撰。其书列古法九章，以今线面体三部之法隶之，与方中通《数度衍》体例相同。而每章设例，必标其凡于首；每问答有所旁通，必附其术于下；每引证必著所出，条理尤详。”

“数度衍二十四卷附录一卷（两江总督采进本） 国朝方中通撰。盖集诸书之长，勒为一编。其推阐九章本《御制数理精蕴》，其《几何约》本徐光启，其珠算本程大位《算法统宗》，其笔算、筹算本李之藻《同文算指》，尺算本陈荩谟《尺算用法》。惟‘数原’、‘律衍’二门未详所本耳。”

“勾股引蒙五卷(浙江巡抚采进本)　国朝陈讦撰。是书亦杂采诸法而成。虽未造精微而浅显易入。其名曰《引蒙》，盖以此也。”

“勾股矩测解原二卷(浙江汪启淑家藏本)　国朝黄百家撰。所论勾股测望之法即《海岛算经》之遗术，与熊三拔《度表说》大概相近，而专明一义，其说尤详。”

“少广补遗一卷(两江总督采进本)　国朝陈世仁撰。其书以一面尖堆及方底、三角底、六角底尖堆、各半堆等题分为十二法，有抽奇、抽偶诸目，盖堆垛之法也。堆垛为‘少广’之一目，算书多未详说，故名曰《补遗》。”

“庄氏算学八卷(福建巡抚采进本)　国朝庄亨阳撰。乃其官淮徐海道时，经理河防，于高深测量之法随事推究，设问答以穷其变，随笔劄记。后人以其残稿编为此书。末附七政步则，本之《新法算书》而摘取其要。”

“九章录要十二卷(浙江巡抚采进本)　国朝屠文漪撰。以古九章合今法。与杜知耕《数学钥》大致略同而互有疏密，彼此可以相补。”

《四库全书总目提要》卷一百七，子部十七，“天文算法类存目”，另记录有：

“历算丛书六十二卷(安徽巡抚采进本)　国朝梅瑴成重定其祖文鼎之书也……”

“八线测表图说一卷(两江总督采进本)　国朝余熙撰。……是编钦遵《御制数理精蕴》，由勾股、和较、割圆、八线、六宗、三要诸法括为图说，以便初学之研究。大旨主于明浅易入，非别有新解也。”

“算法统宗十七卷(内府藏本)　明程大位撰。……此书专为珠算而作。其法皆适于民用，故世俗通行……”

“勾股述二卷(浙江吴玉墀家藏本)　国朝陈讦撰。讦有《勾股引蒙》……因其中和较之法未备，复述此以举其概……”

“隐山鄙事四卷(浙江巡抚采进本)　国朝李子金撰。……是编惟采《几何原本》及《几何要法》二书，稍参己见，无大发明……”

“圜径真旨无卷数(安徽巡抚采进本)　国朝顾长发撰。……长发因以为径一者周三一二五……又谓……所定周径皆未密合……未免强生异议，不足据也。”

第二节　戴震与《算经十书》

一、《算经十书》的流传与版本

《算经十书》包括从汉至唐一千年中的数学名著，有丰富多彩的内容，是了解中国古代数学必不可少的文献，曾在隋唐两代被“立于学官”。

隋代于国子监内设立“算学”(相当于现在大学里的数学系)，置博士二人，助教二人，学生八十人。唐初国子监内未立“算学”，显庆元年(656)始添设算学馆，有学生三十人。《唐六典》卷二十一记载“算学博士掌教文武官八品以下及庶人子之为生者。二分其经以为之业，习九章、海岛、孙子、五曹、张丘建、夏侯阳、周髀、五经算十有五人，习缀术、缉古十有五人，其记遗、三等数亦兼习之。”显庆三年废去算学馆，但在龙朔二年(662)又在国子监内添设“算学”，学生名额由三十人减为十人。与国子监内设立“算学”的同时，国家每年举行的科举考试中也添设了明算科。《新唐书・选举志》记载有明算科的考试章程：“凡算学，录大义本条为问答，明数造术，详明术理，然后为通。试九章三条，海岛、孙子、五曹、张丘建、夏侯阳、周髀、五经算各一条，十通六；记遗、三等数帖读十得九，为第。试缀术、缉古，录大义为问答者，明数造术，详明术理，无注者合数造术，不失义理，然后为通。缀术七条，缉古三条，十通六；记遗、三等数帖读十得

九，为第。”大概在晚唐时期明算科的考试早已停止了。[1]

到了北宋元丰七年(1084)秘书省刻书时，因为《缀术》一书已经失传，所以未能将唐代“立于学官”的十部算经全部印行。北宋刻本的算经实际上有下列九部[2]：

《周髀算经》二卷，赵君卿注，甄鸾述，李淳风等注；

《九章算术》九卷，刘徽注，李淳风等注；

刘徽《海岛算经》一卷，李淳风等注；

《孙子算经》三卷；

《张丘建算经》三卷，刘孝孙演草，李淳风等注；

《五曹算经》五卷；

甄鸾《五经算术》二卷，李淳风等注；

王孝通《缉古算术》一卷；

《夏侯阳算经》三卷。

《周髀算经》和《九章算术》又各有李籍所撰的《音义》附刻于二书之后。

北宋秘书省刻的九部算经有南宋嘉定六年(1213)的鲍澣之翻刻本。鲍澣之又于杭州七宝山三茅宁寿观的《道藏》中觅得徐岳《数术记遗》一卷，认为它也是唐代算学用书之一，将它和北宋监本的算经同付印刷，是为南宋以后流传下来的《算经十书》。

《算经十书》经南宋重版后，至明流传甚少。《永乐大典》收有《周髀算经》二卷，《音义》一卷，《九章算术》九卷，《孙子算经》二卷，《海岛算经》一卷，《五曹算经》五卷，《夏侯阳算经》三卷，《五经算术》二卷，不详版本。程大位《算法统宗》记录的宋版《算经十书》是：《孙子算经》二卷，《张丘建算经》三卷，《九章算经》九卷，《五曹算经》五卷，《夏侯阳算经》三卷，《周

---

[1] 钱宝琮主编．中国数学史．北京：科学出版社，1992．99～100

[2] 钱宝琮．校点算经十书序．见：钱宝琮校点．算经十书．北京：中华书局，1963

髀算经》二卷,《缉古算经》一卷,《数术记遗》一卷,《五经算术》二卷,《海岛算经》一卷。到明末,《算经十书》中仅有《周髀算经》和《数术记遗》刻入《秘册汇函》、《津逮秘书》等丛书之中。

清初,北宋秘书省刻的各种算经全部亡佚,南宋鲍澣之刻本也仅存《周髀算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《缉古算经》、《夏侯阳算经》六部的孤本和残存的《九章算术》五卷。常熟汲古阁主人毛扆倩人影摹得这七种的抄本。乾隆三十九年,戴震由《永乐大典》辑得《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《夏侯阳算经》和《五曹算经》。又辑得《五经算术》、《周髀算经》。另以汲古阁本《张丘建算经》、《缉古算经》,明刊本《数术记遗》共十种,作为四库书的底本。乾隆三十九年(1774)开始采用金简的建议,仿照宋人活字版式,以枣木制成二十五万余活字,名为聚珍版,选印《四库全书》,是为武英殿聚珍版丛书。其中所刻算书有周髀附(《音义》)、九章(附《音义》)、海岛、孙子、五曹、五经、夏侯阳七种。江苏、浙江、江西、福建、广东各处都有翻刻。曲阜孔继涵(1739—1783)在乾隆四十年(1775)据毛氏影摹宋刻本孙子、五曹、张丘建、夏侯阳、周髀、缉古各算经和《永乐大典》本海岛、五经、九章各算经,经戴震校订过,另附明刻本《数术记遗》及戴震所著《策算》和《勾股割圆记》,刻入微波榭丛书,称做《算经十书》。微波榭本《算经十书》流传很广,还有很多翻刻本。

二、戴震对《算经十书》的整理与校勘

戴震,字东原,安徽休宁(今属黄山市)人。清雍正元年十二月二十四日(1724 年 1 月 19 日)生,乾隆四十二年五月二十七日(1777 年 7 月 2 日)卒。他是清代著名的哲学家和考据学家。他的哲学思想集中体现在《原善》三卷(1763)、《孟子字义疏证》三卷(1766)等著作中。戴震是乾嘉学派皖派的首领,他认为治经必先

识字，主张考察字的本义、古义，提出了“疑于义者以声求之，疑于声者以义正之”的原则。戴震同时主张博搜证佐。他不拘泥前人的见解，旨在经过稽核考证去校证古籍中的错讹。他的这些理论在校勘学上有重要的意义。戴震不仅是经学大师，他还通晓天文和数学。其天文著作有《释天》四篇、《迎日推策记》一篇、《九道八行说》一篇等。《释天》借六经以释天文，《迎日推策记》记日月五星之轨道，《九道八行说》专论月道与黄道之离合。他的数学著作有《策筭》(1744)一卷及《勾股割圆记》三卷(1755)。其所谓策筭是指明末传入中国的纳皮尔筭筹。《策筭》讨论用纳皮尔筭筹进行乘除、开平方的方法，其法与梅文鼎同。乘除以《周易》、《汉书》等经史中的某些计算题为例，开平方以《论语》、《考工记》中的有关计算题为例。《勾股割圆记》上篇言三角八线和平面三角形解法，中篇言球面直角三角形解法，下篇言球面斜三角形解法，凡 55 图，49 术，2000 余字。

戴震在数学上的最大贡献是在《四库全书》馆辑录校勘的古代筭经。由于宋元以前的著名筭经到明朝时大多散佚，偶有存者，也流入藏书家手中，研究数学的人难以见及。乾隆三十九年(1774)，戴震从《永乐大典》辑录出《九章筭术》，使久佚的这一中国古代最重要的数学名著得成完帙。由于《永乐大典》中的《九章筭术》舛误较多，图又不传，戴震又对其进行校勘、补图、注释，并撰提要，使其成为《四库全书》及武英殿聚珍版的底本。后来他又参考汲古阁影宋本，先后整理了屈曾发、孔继涵刻本的底本。他的校勘、注释、补图大多十分得体，对恢复古籍的原貌，帮助人们理解《九章筭术》和刘徽、李淳风的本意，作用极大。他同时又辑录到《周髀筭经》、《海岛筭经》、《孙子筭经》、《五曹筭经》、《五经筭术》、《夏侯阳筭经》，收集到《张丘建筭经》、《缉古筭经》、《数术记遗》等九部汉唐筭经，加以校勘。今天所流传的《筭经十书》除宋版及其影抄本外，大都是戴震的校本或以其为底

本。戴震的工作虽未能尽善而有开创之功，奠定了其后各家工作的基础。

第三节 李潢等人的校注工作

自从开始编纂《四库全书》以后，湮没已久的《算经十书》和宋元数学著作又陆续重现。这些古算著作在辗转传刻、传抄的过程中，不可避免地出现了一些错讹，因此需要对它们进行校勘和注释，而这样的校注工作是非常艰巨的。《九章算术》、《海岛算经》、《缉古算经》是《算经十书》中三部有辉煌成就的书，也是三部较为难读的书，李潢首先对它们进行了校注。

李潢(？—1812)，字云门，湖北钟祥人，乾隆三十六年(1771)进士，官至工部左侍郎。在四库全书馆中，他以翰林院编修的资格任总目协纂官。他博综群书，尤精算学，撰《九章算术细草图说》九卷、《海岛算经细草图说》一卷。全书尚未写成定稿，李潢即一病不起，遂嘱其外甥程矞采，务将此书请沈钦裴算校后方可付梓。程矞采遵从李潢遗嘱，于李潢去世八年之后(1820)将沈钦裴请至家中为其算校二书，然后将二书在语鸿堂刊印。

李潢的校注以戴震校订过的孔继涵微波榭本《九章算术》、《海岛算经》为底本，他的书包括细草、图、说三部分内容。其细草是根据《九章算术》术文及刘徽注、《海岛算经》术文列出演算程序；"说"主要是逐句阐述刘徽注，兼之校勘，并根据需要对《九章算术》卷一、四、五、九共四卷及《海岛算经》画出了若干图。他的图比戴震的补图更准确地反映了刘徽注的本意，而且十分细致。这些图在刘徽自画的图失传后，是人们所能看到的关于刘徽注的最好的图。李潢的细草、图、说大多准确反映了刘徽注的深邃的数学创造。刘徽注中若干不容易理解的文字，经过李潢的阐释，大都变得条理清楚，对后人研读《九章算术》和刘徽注

十分有益。李潢没有对戴震所作的校勘加以甄别，只是校勘了戴震没有校勘的文字，并且写入“说”中，未改变所录孔刻本原文。李潢大约有七十条校勘是很得体的。[①] 他还指出了孔刻本中几处与《永乐大典》中的《九章算术》不同的文字，但他没有认识到这是由于戴震辑录时的粗疏和孔刻本的大量修辞加工造成的，因而未能全面校雠。[②]

沈钦裴除了为李潢遗著《九章算术细草图说》和《海岛算经细草图说》算校外，还自撰《重差图说》(不分卷)。《重差》是《海岛算经》的原名，本为刘徽《九章算术注》第十卷，唐以后单行，因其第一题测算海岛的高远，故被称为《海岛算经》，流传到后世。沈氏《重差图说》给《海岛算经》的每个题各补一图一说一草。每个图下有一段文字，系说明图中有关线段及其间的关系，“说”是对术文的解释，“草”是具体的计算过程。沈钦裴对《海岛算经》的解释以《九章算术》勾股章之刘徽注所提出的“勾股相与之势不失本率”这一原理为出发点，试图用相似勾股形的对应边成比例来说明原术文的正确性。但由于《重差图说》的一些图添线较多，不少学者认为沈钦裴的“图说”未必符合刘徽造术的原意。[③]

李潢遗稿中还有《缉古算经考注》二卷，对《缉古算经》全书文字作了校订。公元1832年，程矞采任广东布政使时请吴兰修复校，刻于广州。吴兰修撰序说，李云门先生“刊误补阙凡七百余字，每术附以细草及割截分并虚实比例之旨，是书之蕴毕宣，王氏之真尽出，无庸以天元一术推算矣。”在此之前，张敦仁于公元

---

① 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽. 济南：山东科学技术出版社，1992. 449～450

② 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽. 济南：山东科学技术出版社，1992. 451

③ 邹大海. 重差图说提要. 见：郭书春主编. 中国科学技术典籍通汇·数学卷第五册. 郑州：河南教育出版社，1993. 二一三

1803年以“天元术”解《缉古算经》问题，写成《缉古算经细草》三卷，卷末题“李锐算校”。他根据《缉古算经》最后三题残存的文字，经过细致的数字计算，补足了题目、答案和术文部分。张氏的演草完全不理会王孝通的“自注”，他也没有校补“自注”中脱落的文字。与李潢撰《考注》的同时，陈杰也撰《缉古算经细草》一卷，专以四率比例阐明王孝通原术。后十余年陈杰又撰《缉古算经图解》三卷、《音义》一卷，对《缉古算经》中的错误文字亦有所校订，但数量不多且多与李潢所校正的雷同。他的校注不如李潢的精审。[①]此外，揭廷锵曾于嘉庆二十四年(1819)手抄李潢《考注》的稿本，并补图立说，道光十一年(1831)有《缉古算经图草》二卷刊于江西。该书题“刘衡鉴定、易之瀚校算”。揭氏以西方传入的开方法增补算草。

李潢的《考注》以《九章算术》解释《缉古算经》最为得体。张敦仁以天元术演细草，揭廷锵、陈杰以明、清之际传入的西法作解释，显然不能符合王孝通的原意。[②]

第四节 宋元数学著作的整理

一、《永乐大典》内宋元算书的收集

《永乐大典》于明朝永乐六年(1408)成书。至清朝乾隆三十七年(1772)开四库全书馆时，其中的数学书尚完全存在，并无残缺，[③]因而戴震可以从中辑录出数学著作。

乾隆三十九年(1774)十月三十日戴震与段玉裁书称：“数月来

① 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京：科学出版社，1992. 297

② 钱宝琮.《缉古算经》版本与校勘. 见：钱宝琮校点. 算经十书. 北京：中华书局，1963. 490

③ 李俨. 中国数学大纲. 北京：科学出版社，1958. 483

纂次《永乐大典》内散篇……于算学得九章、海岛、孙子、五曹、夏侯阳五种。”[1] 其余周髀、五经亦辑自《永乐大典》，收入《四库全书》之内。此外，《益古演段》、《数学九章》亦辑自《永乐大典》。

其余未辑出的宋元算书，还有下列各种：

杨辉《详解九章算法》（附《纂类》）十二卷

杨辉《日用算法》二卷(1262)

杨辉《乘除通变本末》三卷(1274)

《田亩比类乘除捷法》二卷(1275)

《续古摘奇算法》二卷(1275)

佚名《透帘细草》一卷

丁巨《丁巨算法》八卷(1355)

佚名《锦囊启源》

贾亨《算法全能集》二卷

安止斋、何平子《详明算法》二卷

严恭《通原算法》二卷(1372)

这些未收入《四库全书》的宋元算书，因清代学者在内府还能看到，因而还续有抄藏。乾隆四十一年(1776)以后鲍廷博(1728—1814)刻《知不足斋丛书》时，除了传刻《四库全书》中已收入的《算经十书》中的《五曹》、《孙子》、《张丘建》、《缉古》四种及李冶的《益古演段》和《测圆海镜》外，还校刻了

杨辉《续古摘奇算法》残本一卷

佚名《透帘细草》残本无卷数

丁巨《丁巨算法》残本一卷

以上三种残本出自阮元所抄《永乐大典》算书的抄本。[2]

---

[1] 段玉裁．戴东原先生年谱．见：《戴震文集》．北京：中华书局，1980

[2] 李俨．中国数学大纲．北京：科学出版社，1958．485

此后莫友芝(1811—1871)子绳孙旧藏的《诸家算法及序记》抄本中收有《日用算法》、《丁巨算法》、《透帘细草》、《锦囊启源》残文和《算法全能集》、《详明算法》、《通原算法》等书，但和《知不足斋丛书》所校刻的不同，是另一人由《永乐大典》中抄得的资料。[①]

郁松年在道光二十年(1840)以后传刻《宜稼堂丛书》，其中有杨辉《详解九章算法》(附《纂类》)残本及《乘除通变本末》三卷、《田亩比类乘除捷法》二卷、《续古摘奇算法》残本一卷和宋景昌所编写的札记。又有《数书九章》十八卷及《数书九章札记》四卷。

二、《四元玉鉴》和《算学启蒙》的收集

阮元(1764—1849)对《四库全书》未收书还续有收集。他抚浙时购得元朱世杰所撰《四元玉鉴》三卷抄本，约于嘉庆十二至十四年间进呈，[②] 作为《四库全书》未收书之一，还撰有“四库未收书提要”刻入《研经室外集》之中。另有《四元玉鉴》原书副抄本，曾嘱李锐(1773—1817)演草。但李锐未及完成此书便于嘉庆二十二年(1817)故去，何元锡(1766—1829)即据副抄本刊布。此本成为后来罗士琳等人研究《四元玉鉴》的底本。

《算学启蒙》三卷的发现较《四元玉鉴》稍晚。罗士琳校勘《四元玉鉴》时，“知是书与《玉鉴》相表里，深以未见为憾。近闻朝鲜以是书为算科试士，因邮浼都中士访获是书，为朝鲜重刊本。”[③]时在道光十九年(1839)。所获为顺治十七年(1660)全州府重刊本。罗士琳即予校刊，阮元为之序，内称“此书成于大德己亥七月既望，乃历今五百四十年。……且目见罗君等算斠刊刻，乐

① 李俨. 十三、十四世纪中国民间数学. 北京：科学出版社，1957

② 据《阮元年谱》推测。

③ 罗士琳. 算学启蒙·后记. 江南制造局刊本

观厥成。”

第五节　沈钦裴等人的校注工作

一、《数书九章》的校注工作

在编纂《四库全书》时，戴震从《永乐大典》中辑出《数学九章》十八卷，这就是《四库全书》本《数学九章》的底本，即人们所说的“馆本”。[①] 而此时，明万历年间赵琦美抄本《数书九章》尚有流传，这就是人们所说的“赵本”。这一时期的《数书九章》的流传，主要是这两个系统的本子。

此时最早研究《数学九章》的是孔广森(1752—1786)，他“少曾师事休宁戴震，因得尽传其学，及官翰林，与窥中秘，得见王孝通《缉古算法》、秦九韶《数学九章》、李冶《益古演段》、《测圆海镜》诸书，由是精研九数，学益大进。”[②]

李潢也藏有《数学九章》，张敦仁(1754—1834)借抄一部，曾与李锐共同讨论研究。秦恩复(1760—1843)也藏有《数学九章》，他自己进行了校证，准备刊刻出版，又请顾广圻(1770—1839)复算。在复算过程中，顾顺便抄了一部，这个本子又被李锐得到。李锐见到的可能是属于两种不同系统的《数书九章》的抄本。他和焦循(1763—1820)、汪莱(1768—1813)等互相讨论过这部书。

《数书九章》的出版，毛岳生(1791—1841)、宋景昌和郁松年三人起了决定性的作用。毛岳生大力搜集该书的各种抄本和校本；宋景昌以赵琦美抄本为主进行详细校对；郁松年主持刊刻。关于这件事，郁松年有较详细的记述：“毛君生甫为予言：秦道古《数

① 李迪．《数书九章》流传考．见：吴文俊主编．秦九韶与《数书九章》．北京：北京师范大学出版社，1987．49

② 罗士琳．续畴人传·孔广森传．光绪二十二年（1896），上海玑衡堂石印本

书九章》思精学博，其中若大衍求一、正负开方两术尤为阐自古不传之秘。第其书转相抄录，讹脱滋多。元和沈广文曾得明人赵琦美抄本于阳城张太守家；订讹补脱，历有年所，以老病未卒业。其弟子江阴宋君景昌，能传其学。余因属毛君索其原本，会广文病甚，不可得，得其副于武进李太史家。毛君又出其家藏元和李茂才所校四库馆本，并属宋君为之雠校。嗣广文没，宋君又于其家搜得秦书刊误残稿数卷，于是以赵本为主，参以各本。”[①]从而完成《数书九章札记》四卷。经过宋景昌校勘的《数书九章》和所撰《札记》，一并收入郁松年编的《宜稼堂丛书》中，这是《数书九章》第一次刊印出版。

万历末年的赵琦美抄本被发掘出来后，转入张敦仁手中。张殁后，赵本为沈钦裴所得，并进行了“订讹补脱”工作。李兆洛(1769—1841)收有赵本的抄本，这个再抄本为毛岳生所得。李锐校对过的馆本也流落到毛岳生家。毛将此两种本子都交给了宋景昌。沈钦裴殁后，其所藏赵本和“刊误残稿数卷”也为宋景昌所得。因此，宋景昌手中至少有三个以上的秦书抄本，包括馆本和赵本两个系统。这为宋景昌的校对提供了有利条件。宋景昌“以赵本为主，参以各本”，进行了详细校对和勘误。《数书九章札记》中所引用的主要是馆本，但也参考了沈钦裴的工作，引用了沈氏的许多看法或表示了不同的意见。李锐的校勘成果和毛岳生的一些见解，宋景昌也多有采纳。可以说宋景昌的工作是在沈钦裴、李锐和毛岳生等人工作的基础上进行的，他的工作比前人完整而且得到了公开出版的机会，因而为后人所知。

《宜稼堂丛书》本《数书九章》脱胎于赵本，并成为以后各本的母本，流传很广。

---

① 宋景昌．数书九章札记·郁松年序．丛书集成本

二、《四元玉鉴》的校注工作

《四元玉鉴》被重新发现后，立即引起数学界的重视，徐有壬记述了当时数学家们传抄此书的情形："壬午(1822)获读是书，积思三昼夜，以意步为细草，狎鸥沈先生见而奇之，手录以去。厥后戱金溪少宼、朱筠麓观察及董君方立、项君梅侣、王君北堂、黎君见山、罗君茗香争相传抄。"①可见，徐有壬是较早校勘《四元玉鉴》的一位学者。此后，清代数学家沈钦裴、罗士琳、戴煦、李善兰等都对《四元玉鉴》进行过研究，成绩突出者当推沈钦裴、罗士琳和戴煦。

沈钦裴，字侠侯，号狎鸥，江苏元和(今苏州市)人，嘉庆十二年(1807)举人。他于1820年为李潢遗著《九章算术细草图说》和《海岛算经细草图说》算校，还曾校注《数书九章》"大衍求一术"，遗稿被收入其弟子宋景昌的《数书九章札记》中。又著有《重差图说》不分卷(1824)，今传抄本。沈钦裴何时开始研究《四元玉鉴》已不可考。现在所看到的沈钦裴的《四元细草》有两种抄本。一种是王北堂(萱铃)的学生白桂贞、白焜的同抄本，只到卷中，共六册。书前道光七年(1827)王萱铃记："此道光元年(1821)余徒白桂贞、白焜同抄"，可见道光元年时沈钦裴已草至卷中。沈氏细草的另一抄本基本完整，共六册，书前载有《今古开方会要之图细草》一卷，并有道光九年(1829)和道光十年沈氏两序。沈氏细草的原稿本已不知流落何处，其两个抄本都未曾刊刻印行，影响不大。

罗士琳，字次璆，号茗香，江苏甘泉(今扬州市)人。著作及校勘各书结为《观我生室汇稿》十一种，有道光二十三年(1843)阮元序。他于1822年到顺天府应乡试，始于叶云素(继雯)处获见《四元玉鉴》，愿学未能。次年从黎应南处得一《四元玉鉴》的抄

① 罗士琳．演元九式・徐有壬跋．观我生室汇稿本

本，龚自珍(1792—1841)又赠给他《四元玉鉴》的何刻本。罗士琳遂着手校勘《四元玉鉴》，至1835年，完成《四元玉鉴细草》二十四卷。罗士琳对原书提出校改共130余处，并对每一问题均给出详草。罗著细草出版后，影响很大，成为探讨《四元玉鉴》的必读书籍。[①]

《四元玉鉴》原书术文非常简括，读者很难理解。罗士琳的《四元玉鉴细草》"能以平易之语，反复详明，引申取譬导其先路，是有积极意义的。但他所拟作的演算程序未必尽合朱世杰的原意。沈钦裴对朱世杰的四元消法和垛积术有精辟的见解，他的成就似在罗士琳之上。"[②]

戴煦也撰有《四元玉鉴细草》(1844)，系以何刻本为底本逐题演草。其书定稿较沈、罗二人均晚，从书末附记中可知此细草为其独立完成，校勘质量很高。新竹清华大学立青文库收有王吉孚道光二十五年(1845)戴草的抄校本。[③] 丁取忠《白芙堂算学丛书》中亦收入《四元玉鉴》，是为丁取忠校本。此本对罗士琳细草本进行了校改，吸收了罗氏细草中的某些校改意见。[④] 李善兰对《四元玉鉴》的研究以汪曰桢抄本为底本，汪抄本属何刻本体系。清末有许多学者研究过《四元玉鉴》，出现多部有关该书的研究著作，这些著作都以罗士琳细草本为底本。

三、《测圆海镜》的校注工作

在《四库全书》成书之前，孔广森便对《测圆海镜》作了批

① 杜石然．朱世杰研究．见：钱宝琮等．宋元数学史论文集．北京：科学出版社，1985．176

② 钱宝琮主编．中国数学史．北京：科学出版社，1992．298

③ 刘钝．访台所见数学珍籍．中国科技史料，1995，16(4)：14～15

④ 田淼：《四元玉鉴》的清代版本及《假令四草》的校勘研究．自然科学史研究，1999，18(1)：39

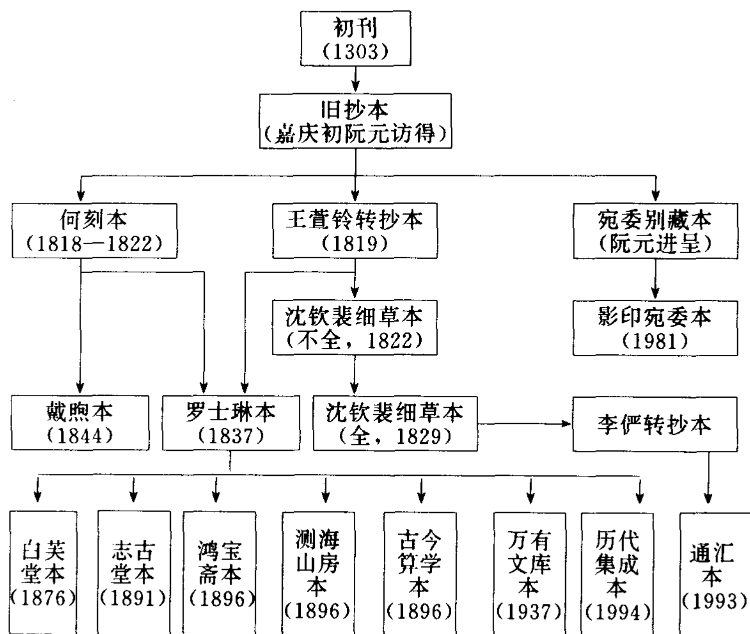


图 1.1.1 《四元玉鉴》版本流传图

校。至 1875 年，批校已及一、二、三、七各卷，共二十七条。[1] 但他转年就去世了，批校工作没有完成，已作的批校当时也没有刊印，影响不大。

《四库全书》中的《测圆海镜》十二卷是四库馆员根据李潢(? --1812)家藏本略加校勘后收入的。《四库全书》只有七部抄本，流传不广。阮元视学浙江时从文澜阁《四库全书》中抄得《测圆海镜》一部，连同其已经得到的丁杰所藏旧本《测圆海镜细草》一起交于李锐，嘱其重新算校一遍。嘉庆二年(1797)，李锐完成这

① 李俨. 测圆海镜研究历程考. 见：李俨. 中算史论丛. 第四集. 北京：科学出版社，1955. 33

一工作，并加按语于各错误之处或可疑之处，此本成为以后最为通行的版本。转年，歙县鲍廷博把李锐的校订本刻入《知不足斋丛书》的第二十集中。以后对《测圆海镜》的诸多研究，基本上是以李锐的校订本或《知不足斋丛书》本为底本的。

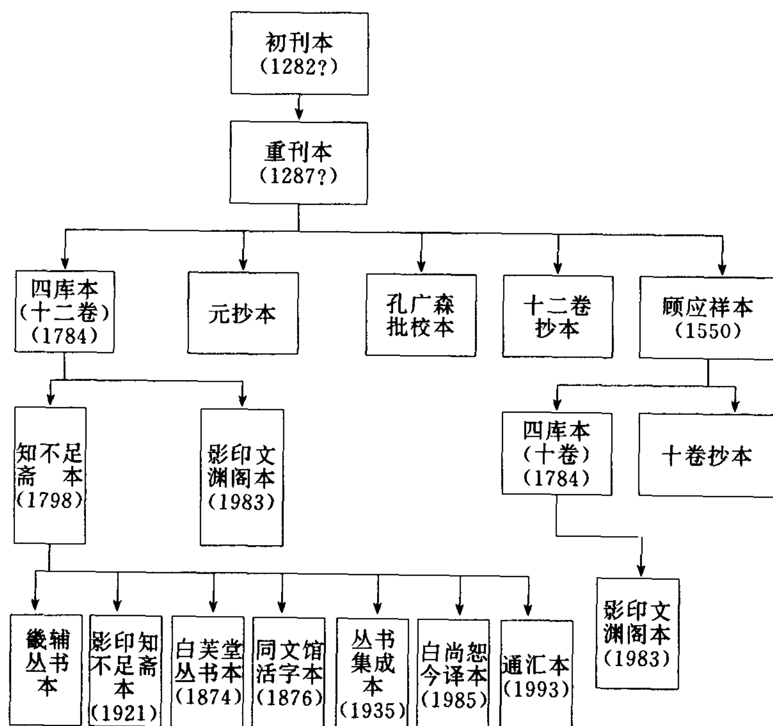


图 1.1.2 《测圆海镜》版本流传图

第六节 《畴人传》及其续书

《畴人传》四十六卷是清嘉庆年间问世的一部评述历代天文学

家、数学家活动的传记集。道光、光绪年间又有《续畴人传》六卷、《畴人传三编》七卷及《畴人传四编》十二卷出版。

一、《畴人传》

《畴人传》题署“经筵讲官、南书房行走、户部左侍郎、兼管国子监算学、扬州阮元撰”。书中署有“阮元手订”的《凡例》提到“助元校录者，元和学生李锐暨台州学生周治平力居多”。有研究认为，阮元是组织者、主持人，并亲手写了“传论”，而各传正文则主要由李锐搜集整理而成。[①] 关于《畴人传》的编撰时间，合乎逻辑的时间表可能是：1795 年阮元产生编撰《畴人传》的想法。1797 年初与李锐商妥编纂方法，由李锐动手。1798 年阮元去北京，李锐则在杭州继续编纂。1799 年阮元回到杭州，人物传记资料的收集截止，此时又有周治平做校录工作。此后阮元陆续撰写“传”后的“论”，直到 1810 年定稿出版。[②]

《畴人传》四十六卷，前四十二卷二百三十三篇，记载上起传说中三皇五帝时代，下迄嘉庆四年(1799)去世的中国天文历法学家和数学家二百七十五人。后四卷作为附录，三十六篇，记载西洋天文学家、数学家和来华传教士四十一人。

各篇多由“传”和“论”两部分构成。“传”通常在传主的姓名、字号、籍贯、科举出身和主要官职之后以主要的篇幅介绍传主有关天文、数学的言行。对有关改历的奏折、文章、辩论经过记录颇详。对于传主的天文、数学著作，不论存佚，都列出名目，并常记其摘要，录其序言、凡例等，这对研究有关学者的学术思想非常方便。“传”中对传主的生年和著作问世时间则通常不提及。

---

① 傅祚华.《畴人传》研究. 见：梅荣照主编. 明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 220

② 傅祚华.《畴人传》研究. 见：梅荣照主编. 明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 231

这些传记的编写，主要利用了杭州文澜阁所藏《四库全书》。中国天文、数学家传记引用的书籍除二十四史的志、传以外，还有历代的天文、历法、数学原著，学者笔记、文集及书目、地方志等一百二十余种。年代较近的清代学者传记则包含不少查访所得的材料。西洋人传记取材于明末以后翻译编撰成的介绍西方天文算法的中文书籍。

《畴人传》中的"传"与一般的人物传记也不尽相同。它并不对人物的生平做全面的记述，而只是介绍其有关天文、数学的言论和事迹。《畴人传》的编写宗旨是"综算氏之大名，纪步天之正轨"①，所以书中各传的内容并非互不关联，而是围绕着天文、数学的发展这条主线，彼此联结成一个完整的链条、有机的整体。在各传后的"论"中，编者或者对人物的思想和工作进行评价，或者对学术的源流沿革进行分析。《畴人传》的编者认为"二千年来，术经七十改，作者非一人。其建率改宪，虽疏密殊途，而各有特识，法数具存，皆足以为将来典要。"看来他们是想尝试成就一部天文、数学史著作。

历法在中国古代天文学中占有特殊的地位。一方面，因为它内容丰富，在年、月、日和节气的安排外，还要推算日食、月食和行星的运行；另一方面，颁布历法在几千年间被当作统治的象征。王朝建立，君主登极，常常提出改历的要求。而观测精度的提高、计算方法的改进和历法理论的创新，也促使着历法的完善和更新。中国古代天文学的许多重要成果都是围绕改历取得的。

《畴人传》结合对天文、历法学家活动的记载，突出地介绍了自汉代《太初历》以后七十余家历法的缘起、制定经过，记载了一些主要数据，同时对各历法的优劣也有评论和分析。《畴人传》的编者始终把注意力放在历法改革中出现的新理论、新方法上。如

---

① 阮元．畴人传·序．测海山房本

对东汉李梵、苏统发现月行迟疾、刘洪《乾象历》用月行迟疾校正朔望时刻，晋虞喜发现岁差，南北朝何承天创调日法，祖冲之《大明历》引入岁差，唐李淳风《麟德历》简化计算等等多加以突出的述评。

《畴人传》中关于天文学的内容，除了历法之外，对宇宙结构、天体运行的学说给予了相当的注意。《畴人传》的编者由于认识到观测仪器在天文历法中所起的重要作用，因而对历代所用天文观测仪器的制造、改进都有详细的记录。对各种仪器的设计意图、基本形制记载都比较具体。如对东汉张衡制浑象，隋耿询创水转浑象，唐李淳风制六合仪、四游仪，一行等制水运浑象，宋苏颂、韩公廉造水运仪象台，元郭守敬等创制简仪、景符等都有详细的介绍。

中国古代数学与天文历法关系密切。精确的历法不仅要依靠精密的观测，还要依靠复杂的计算。因而，推算历法即成为中国古代数学最实际的应用。

《畴人传》明代以前部分提到编撰或注释数学书的有四十余人，约占书中同期人数的四分之一。清代部分(截止于嘉庆四年)介绍的数学家也有四十余名，约占书中同期人数的三分之二。《畴人传》的“论”中关于数学知识源流的分析，有不少精当的见解。如认为《孙子算经》中“物不知数”问题“为九章所未及”，秦九韶的“大衍求一术”即源出这个问题等等。

二、《畴人传》的续书

1.《续畴人传》

《畴人传》成书之后，湮没已久的宋元时期的杨辉、朱世杰的数学著作又被重新发现。几十年间，乾嘉时期有成就的天文、数学家又相继谢世。因而，《畴人传》有了续补的必要。道光二十年(1840)，罗士琳撰成《续畴人传》六卷。

《续畴人传》包括“补遗”两卷和“续补”四卷。“补遗”两

卷介绍了宋元时代的及在《畴人传》出版前去世而《畴人传》没收录的天文、数学家十六人。“续补”四卷介绍了嘉庆、道光年间去世的天文、数学家二十七人。乾嘉时期的活跃畴人基本都在其中。编者与各传传主生活年代接近，因而收集材料丰富，对学者们研究天文、数学的经历及所取得的成绩，都有比较详实的叙述。特别对于数学著作，常能发其渊源，也能指出其错误之处。

2.《畴人传三编》

光绪十二年(1886)，诸可宝编成《畴人传三编》七卷。前两卷“补遗”，记清初至道光年间去世的学者五十二人，其中多数撰有天文、数学著作。随后四卷记道光至光绪初年去世的学者五十八人。其中有不少名家，如罗士琳、项名达、徐有壬、戴煦、李善兰等，他们大多能会通中西又有独立创造。诸可宝广泛收集资料，也做了认真的分析，能提出独到的见解。在最后一卷里，记有三名清代女天文学家、十五名西洋人和一名日本人。

3.《畴人传四编》

光绪二十四年(1898)，湖南澧州人黄钟骏父子编成《畴人传四编》十一卷附一卷。编者立意于补前三传的遗漏，网罗散佚，以备稽考。书中立传的人物中国有283人(其中女子5人)、西洋157人(其中女子4人)。

《畴人传四编》对与星占学有关、被前几编舍弃但确有天文学成就的人物也收录进来。留下最早星表的石申、甘德和《步天歌》的作者王希明等人都在该书中得以立传。书中多数人以“某某著某某天算书”而被收入。虽然这些书几乎都已散佚，难以对其书其人进行确切的评价，但从“以备稽考”的角度看，收入还是应当的。由于鸦片战争后所译的西书激增，对西洋天文、数学家有了较多的介绍，因而《畴人传四编》的西洋人部分收录颇丰。

《畴人传》各编收录历代学者人数表①如下：

表 1.1.1　《畴人传》各编历代学者人数表

	《畴人传》	《续编》	《三编》	《四编》
秦以前	17			17
汉	32			13
三国	10			10
晋	9			7
南北朝	28			37
隋	9			10
唐、五代	18			35
宋、辽、金	37	2		62
元	13	6		12
明	39			38
清	63	36	113	43
西洋、日本	41		16	157

《畴人传》及其续书的版本：

《畴人传》四十六卷及《续编》六卷有《文选楼丛书》本、《观我生室汇稿》本、光绪八年(1882)海盐张氏常惺斋刊本、《国学基本丛书》本及《丛书集成》本。

《畴人传三编》有《南菁书院丛书》本。光绪二十二年(1896)《畴人传》正、续及三编并华世芳《近代畴人著述记》被收入《测海山房中西算学丛刻初编》中，同时这个“合刻四种”又

① 傅祚华.《畴人传》研究. 见：梅荣照主编. 明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 255



有上海玑衡堂石印单行本。1935年，商务印书馆据“合刻四种”排印，收入《国学基本丛书》中。

《畴人传四编》有《留有余斋丛书》本和1955年商务印书馆的排印本。1955年，商务印书馆还将前三编断句、印单行本。

第二章 焦循、汪莱、李锐的研究工作

第一节 焦循及其《加减乘除释》

焦循，字理堂，一字里堂，晚号里堂老人，江苏甘泉(今扬州邗江县)人。生于乾隆二十八年二月初八(1763年3月27日)，于嘉庆二十五年七月二十七日(1820年9月4日)病逝。[1]乾隆四十四年(1779)，焦循应童子试，被取为甘泉县学补附生。自此，尽弃他学，致力于经。乾隆四十九年，焦循因经学出色，得补廪膳生。因家境贫寒，他从乾隆五十二年(1787)开始外出教书，其间几次参加乡试不第，直至嘉庆六年(1801)秋，应乡试中辛酉科举人。嘉庆七年，焦循入京会试落第，自此决意居家，潜心著述。嘉庆十四年(1809)，他参与《扬州府志》的纂修。志修成后，焦循得到一份酬金，以其少半在扬州北湖旧居附近买地五亩，大半用于整修旧居，并构建一座小楼，名曰雕菰楼。此后，焦循读书著书恒在楼中，直至终老。

焦循博闻强记，识见精卓，经史、历算、声韵、训诂无所不精，壮年即名重海内。殁后，阮元在为其所作的传记中称之为“通儒”。焦循一生著书数百卷，大多收入《焦氏丛书》中。焦循擅长易学，撰《易通释》二十卷(1810)、《易图略》八卷(1813)、《易章句》十二卷(1815)，世称“易学三书”，自称立“旁通”、“相错”、“时行”三义。以数理释易，更以治易之法通释诸经，获

[1] 朱家生，吴裕宾．焦循年谱．见：洪万生主编．谈天三友．台北：明文书局，1993．311，330

得新的成果，颇受经学界的推崇与赞许。又著《剧说》六卷(1805)，开戏剧研究之先河。焦循于乾隆五十二年开始学习和研究数学，由于所处偏僻，学无师授，所以只好自己刻苦用力。其数学著作有《里堂学算记》，包括《释轮》二卷(1796)、《释椭》一卷(1796)、《释弧》三卷(1798)、《加减乘除释》八卷(1798)和《天元一释》二卷(1800)。另外还有《开方通释》一卷(1801)及未刊稿《乘方释例》五卷和《大衍求一术》一卷及《孙子算经注》等。焦循的数学成就与汪莱、李锐齐名，有"谈天三友"之称。

《释轮》二卷讨论传入中国的第谷(B. Tycho，1546—1601，丹麦天文学家)天文学说中的本轮、次轮的几何原理，"上篇言诸轮之异同，下篇言弧线之变化，以明立法之意"[①]。《释椭》一卷讨论传入中国的卡西尼(G. D. Cassini，1625—1721，意大利天文学家)天文学说中的椭圆知识。此二书内容和康熙、雍正时期的历法有关。《释弧》三卷草成于乾隆六十年，"上篇释正弧弦切之用，中篇释内外垂弧之义，下篇释次形及矢较之术"。三年后，又觉所论"立表之理不明，由裁弧为弦之法不备，宜补之。"故将昔年所论的六弧八线补为上卷，原来的上、中两卷合为中卷，下卷不动，重成三卷。[②]该书在梅文鼎《弧三角举要》、《环中黍尺》及戴震《勾股割圆记》的基础上重点讨论球面三角形的解法。焦循的这三种著作总结了当时天文学中的数学基础知识。[③]

焦循在杭州阮元幕府时获见李冶的《测圆海镜》和《益古演段》两书，感到二书端绪丛繁、学者鲜能知要。后来他又从镇江抄得文淙阁四库本的秦九韶《数书九章》，深感"其中用开方法既精且简，不特与《测圆海镜》相表里"，故写成《天元一释》和

---

① 焦循. 释轮·卷上. 嘉庆四年雕菰楼刊本

② 焦循. 释弧·序. 嘉庆四年雕菰楼刊本

③ 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京：科学出版社，1981. 286

《开方通释》两部著作。

《天元一释》二卷，卷上首先阐述了“立天元一”的几何意义，对其所用名词一一作了较为直观的解释。根据一元高次方程各项系数符号的变化情况给出了方程的分类，并将《测圆海镜》中的方程按照自己的分类标准一一予以归类。此外，还具体讨论了宋元数学中的“天元在上，太极在下”和“太极在上，天元在下”这两种记法的利弊。卷下首先辩明秦九韶《数书九章》卷一“大衍”、“求衍数法”与“大衍求一术”中的“立天元一”和李冶《测圆海镜》、《益古演段》的“天元术”中的“立天元一”的不同，接着重点对各种类型的方程及其变形求解的基本方法一一注释，特别是对带分寄母、同数相消之故，条分缕析，尤为详尽，并指出了“天元术”中的一些算法与《九章算术》的渊源关系。卷末通过考证，否定了当时流行的“李演秦说”的说法。《天元一释》虽然只是对“天元术”的注释，但其所论重在算理，表明焦循对方程论的研究已经不再停留在具体解法的讨论，而是上升到对理论的探讨。

《开方通释》前半部论“十二式”，每式又都列出一至十二次方程并以例题及术草加以说明，是全书的核心部分。其中前八式实为八种不同形式的高次方程：一式为一般高次方程的表达法，称为“都式”；二式为“开方无从者”，即 $x^n=A(n\leqslant 10)$ 的形式；三式为“玲珑开方式”，即为仅有偶次项或仅有奇次项的方程；四式为“正负式”，即方程只有“实”负，其余各项均为正数；五式为只有“隅”正，其余各项均为负数的方程；六式为“方”正，其余各项均为负数的高次方程；七式为“廉”或“方”中有一项为正而其余诸项皆负的高次方程；八式为各项正负相间的高次方程。后面四式则是“增乘开方法”的几个关键步骤。九式为“定位式”，是“开方要法”；十式是“方廉隅定位式”，论述内容相当于现代方程论中的倍根变换问题；十一式是“廉法”，相当于现代方

程论中的减根变换；十二式为“退位式”，相当于现代方程论中的扩根变换。《开方通释》的后半部主要是以实例说明李冶、秦九韶方法的异同，例题取自《测圆海镜》、《益古演段》和《数书九章》。焦循也特别阐明了“投胎”、“换骨”、“连枝同体”等方法的意义。

明、清两代学者对李冶的“天元术”、秦九韶的“大衍求一术”和“正负开方术”所知甚少。直至开始纂修《四库全书》时，秦、李之书才被发现，于是许多学者开始对其进行整理、校勘。焦循的上述两种著作，就是复兴宋元数学的工作中的一部分。

《加减乘除释》草创于乾隆五十九年，嘉庆二年在进一步研究古算著述的基础上，删补旧稿成书八卷，此为焦氏的代表作。其第一、五两卷主要论述数的加减运算法则；第二卷主要论述二项式的乘方运算；第三卷主要论述数的乘除运算法则；第四、六两卷主要论述分数的性质及其运算法则；第七卷讨论各类比例问题；第八卷主要论述加减乘除四则运算法则。全书共列出运算法则九十三条，每一条相当于现代数学书中的一条定理或公式。[①]

焦循认为“论数之理，取于相通，不偏举数，而以甲、乙明之。”[②]故在书中用甲、乙、丙、丁等汉字代表不同的数字，这是我国数学书中的一个创举。[③]焦循在书中给出了一些名词术语的定义和一些运算定律，如：

“以甲加甲为倍之。”

“以甲中分为半之。”

“三分甲，以二为大半，一为少半。”

“受除者为实，所以除者为法，实如法而一为法除。”

---

① 吴裕宾．焦循与《加减乘除释》．自然科学史研究，1986，5(2)：123

② 焦循．加减乘除释．卷一．嘉庆四年雕菰楼刊本

③ 钱宝琮主编．中国数学史．北京：科学出版社，1981．287

"以甲乘乙或以乙乘甲为相乘。"

"以甲、乙各为母、子，以甲母乘乙子，以乙母乘甲子为维乘。"

"以甲加乙或以乙加甲，其和数等。"

此即加法交换律：$a+b=b+a$。

"先以甲、乙相加，后加以丙；或先以乙、丙相加，后加以甲；或先以甲、丙相加，后加以乙，其得数皆同。"

此即加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b$。

"以甲乘乙，犹之以乙乘甲。"

这是乘法交换律：$ab=ba$。

"先以乙乘甲，连以丙乘之；或先以丙乘乙，连以甲乘之；或先以甲乘丙，连以乙乘之，其得数皆等。"

这是乘法结合律：$(ab)c=a(bc)=(ac)b$。

"以甲盈朒分之，各乘以乙，合之，其数等。"

这是乘法对加法的分配律：设 $a=m+n$，$m\neq n$，则 $ab=(m+n)b=mb+nb$。

焦循还提出另外一些算律，如：

"减乙于甲而加丙，则甲少一丙、乙之差；减丙于甲而加乙，则甲多一丙、乙之差。"

此即 $(a-b)+c=a-(b-c)$，$(a-c)+b=a+(b-c)$。

"若乙、丙之差如甲、乙之差，则以乙加乙，以丙加甲，或以乙减甲，以丙减乙，其差皆平。"

此即：若 $b-c=a-b$，则 $(b+b)-(a+c)=0$，或 $(a-b)-(b-c)=0$。

"以甲除乙，以丙乘之得丁，丁之于丙，犹乙之于甲。"

此即 $(b\div a)\times c=d$，则 $d\div c=b\div a$。

在叙述这些加减乘除运算法则之后，焦循往往用具体的数字或《九章算术》、《孙子算经》等古代算书中的具体问题来加以说明论证。

在《加减乘除释》中，焦循还有一些关于加减乘除运算间的关系的论述：

“乘以驭加之繁，除以驭减之繁。乘除为加减之简法，而不足以尽加减之用。”

“以加来者，消之于减；以乘来者，消之于除。”

此即表明加法与减法互为逆运算，乘法与除法互为逆运算。

“开平方出于自乘。”

即乘方与开方互为逆运算。

“除法不离于乘，而乘法不外于加。故明乎加减之理，即明乎乘除之理。”

这些论述在今天看来也是正确的。

焦循在《加减乘除释·卷一》的序中说：

“刘氏徽之注《九章算术》，犹许氏慎之撰《说文解字》。士生千百年后，欲知古人仰观俯察之旨，舍许氏之书不可，欲知古人参天两地之原，舍刘氏之书亦不可。……既有‘少广’、‘勾股’，又必指而别之曰‘方田’、曰‘商功’；既有‘衰分’、‘盈不足’、‘方程’，又必明以示之曰‘粟米’、曰‘均输’，亦指其事物之所在，而使学者人人可以案名以知术也。然名起于立法之后，理存于立法之先。理者何？加减乘除四者之错综变化也。而四者之杂于九章，则不啻六书之声杂于各部。故同一‘今有’之术，用于‘衰分’，复用于‘粟米’；同一‘齐同’之术，用于‘方田’，复用于‘均输’；同一弦矢之术，用于‘勾股’，复用于‘少广’，而立方之上，不详三乘以上之方；四表之测，未尽三率相求之例。踵其后者，又截‘粟米’为‘贵贱衰分’，移‘均输’为‘叠借互征’。名目既繁，本原益晦。盖九章不能尽加减乘除之用，而加减乘除可以通九章之穷。孙子、张邱建两书似得此意，乃说之不详，亦无由得其会通。不揆浅陋，本刘氏之书；以加减乘除为纲，以九章分注而辨明之。”

他认为加减乘除运算的法则可以把《九章算术》的问题全部贯通起来。由此我们也可以看出他撰写《加减乘除释》的目的：试图用加减乘除运算法则，将古代数学中传统算法反映出的数学原理予以会通和概括。

焦循的《加减乘除释》以加减乘除运算法则作为基本内容，而不以具体的数学问题作为研究对象，可视为一部理论性的数学专著。因而，焦氏的工作反映出中国传统数学抽象化的倾向。

第二节　汪莱及其《衡斋算学》

汪莱，字孝婴，号衡斋，安徽歙县人。他生于乾隆三十三年八月二十七日(1768年10月7日)，卒于嘉庆十八年十一月二十日(1813年12月12日)[①]，是清代著名的数学家。除了数学之外，他还精通文字、音韵、律历、经学。汪莱一生著作不少，但是半皆散佚。现传《衡斋算学》七册、《衡斋遗书》九卷及抄本《衡斋先生烬余诗稿》一册。

汪莱自幼聪慧过人，七岁能诗，十五岁入庠。汪莱少时，歙县经常遭受水、旱灾害的侵袭，他除了读书之外，也要劳动，“竭力养亲”。他自己在《〈大统锦灵经〉读书记》中也说：“余年二十有二，始习九九，读宣城梅氏《历学骈枝》……”乾隆五十七年(1792)，汪莱自制浑天仪、一方仪、简平仪及勺多漏等仪器并用以观测天象。同年撰成《覆载通几》和《参两算经》。乾隆五十八年，汪莱去苏州课馆。课徒之余，对球面三角作专门研究，并撰写关于次形法的论文。这一年，焦循入省城参加会试。在此期间，汪莱与焦循相识，切磋学问，结为莫逆之交。三年后，汪莱由苏州返回歙县。

---

① 汪宜楷．汪莱出生年月辩证．中国科技史料，1996，17(4)：30

汪莱自回歙县后至嘉庆五年(1800)一直在故里刻苦攻读，完成了《衡斋算学》第一册至第四册。嘉庆元年(1796)，汪莱与巴孟嘉(树谷)讨论五星伏见及黄赤交变，涉及到球面三角的计算，成“弧三角形”书稿，连同以前在苏州撰写的关于次形的论文合成一册，为《衡斋算学》第一册。汪莱的另一同乡学友江玉(兼甫)曾向他提出以勾弦和及内容正方形边长求诸数的计算，汪莱于嘉庆三年(1798)解决这一问题成“勾股形”书稿，实为《衡斋算学》第二册。同年，巴孟嘉将这两册书稿合刻，名之为《衡斋算学》，是为汪莱数学著作的初刊本。这一年秋天，汪莱赴南京乡试不中，巴孟嘉适有失子之痛，二人移情于数学问题。冬初，汪莱完成巴孟嘉提出的课题，著《衡斋算学》第三册。稿成后汪莱手抄一部寄给焦循。嘉庆四年(1799)，汪莱又写了一篇名为“弧三角形”的论文，连同旧著《递兼数理》合为一册，即是《衡斋算学》第四册。嘉庆五年，汪莱曾赴南京参加恩科乡试，并有机会与李锐初次见面。

嘉庆六年(1801)，汪莱由歙县至扬州，馆于秦恩复家。在此期间，汪莱得读宋元算家秦九韶、李冶的著作，并得以与江藩、钱献之、张敦仁等学者相识。在与江藩共同研讨秦、李著作的基础上，汪莱撰成《衡斋算学》第五册。秋后，汪莱从扬州赴六安，途中写成《衡斋算学》第六册。年底，汪延麟在扬州为汪莱刊刻了第三至第六册，续成六卷本的《衡斋算学》。汪莱在《衡斋算学》第五册稿成之后曾寄一部给焦循，焦循于嘉庆七年春收到书稿。这年秋天，焦循将《衡斋算学》第五册出示李锐，李锐读过后为此册作跋文一篇，称“是书穷幽极微，真算氏之最也”。同时李锐推广了汪莱的研究，将所得结果归纳为三条结论。嘉庆八年(1803)，汪莱自六安返回扬州，听说李锐对自己的第五册算书有所讥评，便至焦循家中询问。焦循将李锐所作跋文交给汪莱，汪莱看后欣然说道：“尚之固不我非也。”同时也指出李锐归纳的三条“亦稍有

未当处”。嘉庆九年，张敦仁任扬州知府，李锐应召为其幕宾。其时汪莱、焦循、凌廷堪、沈钦裴等均在扬州，大家曾在一起研究讨论。汪莱则进一步研究方程理论，撰成《衡斋算学》第七册。至此，汪莱的主要数学著作都已完成。这年秋天，当涂学者夏銮被选任新安训导。

嘉庆十年(1805)春，夏銮到任后即去探访汪莱，可是“汪莱不归家已五年”。是年夏天，汪莱由扬州归家，听说夏銮曾来找过他，即去拜谒夏銮。两人畅谈终日，成为莫逆之交。一个多月后，夏銮举荐汪莱参加岁试，汪莱得以成为廪生。同年，汪莱又被举荐为优行督学。夏銮命当时肄业于紫阳书院的胡培翚执贽于汪莱门下。嘉庆十一年(1806)，汪莱又去扬州课馆，当时焦循亦馆于城中，两馆相距不远，二人经常往来，探讨学问。这年夏天，两江总督邀请汪莱主持测量黄河在云梯关外旧海口与六塘河新海口地形的高低这一工作。[①] 嘉庆十二年，汪莱从扬州返回歙县，继任优行督学。同年，经夏銮举荐，汪莱参加考试，以优行第一贡赴北京国子监学习。[②]转年，汪莱在北京考取八旗官学教习。这一年，经举荐，汪莱被召入国史馆纂修《天文志》和《时宪志》。嘉庆十四年(1809)，国史馆的修志任务完成后，汪莱被选用为石埭县训导。是年冬天，汪莱由北京归里。嘉庆十五年，汪莱赴石埭任训导，并将《衡斋算学》第七册单独付梓。此后三年，汪莱在任上尽心课士，直至嘉庆十八年(1813)病逝。汪莱一生清贫，殁后，囊箧空空，石埭百姓出资送其归葬故里。

汪莱生前，《衡斋算学》已有三种刊本。汪莱殁后，其门人夏燮于咸丰四年(1854)将《衡斋算学》七册与《衡斋遗书》九卷一起刊于鄱阳县署，题称《衡斋算学遗书合刻》，此为汪莱著作最早的完整的刊本。光绪十八年(1892)，汪莱的长孙汪廷栋又以夏燮

①② 汪宜楷．汪莱年谱．见：洪万生主编．谈天三友．台北：明文书局，1993

刊本为底本，将此书翻刻于歙县，刊成后板藏其祖居之闻梅旧塾。[①]

《衡斋遗书》包括《覆载通几》一卷、《参两算经》一卷、《乐律逢源》一卷、《考定磬氏倨勾令鼓旁线中悬而悬居线右解》一卷、《校正九章算术及戴氏订讹》一卷、《今有录》一卷及《衡斋文集》三卷，《衡斋文集》中也收有一些关于天文或数学研究的论文。

《衡斋算学》第一册和第四册前半是关于球面三角的研究。清代梅文鼎(1633—1721)所著的《弧三角举要》、《环中黍尺》及《堑堵测量》三书就明末以来传入的球面三角知识作出全面的总结，并以所创球面正投影法在图形画法和公式证明方面有突出成就。梅著关于次形和直角三角形有如下的两个限制条件。其一，凡所作次形须与本形在本形某边大圆的同侧以使次形与本形的正投影可见；其二，凡所作直角三角形须无大边和钝角以使直角三角形求解公式的各函数值皆为正值。由于上述两个限制条件，使得次形和垂弧的作法复杂化并与当时传入的有关次形和垂弧的某些内容相抵牾。至于球面三角形解的个数及有解的条件等比较抽象的内容当时未曾传入，梅氏的工作亦未深入至此。汪莱的工作主要有两个方面。其一，“三角求边用次形”及“斜弧三角用垂弧”等节完善梅氏球面正投影法并运用三角函数符号法则，从而去掉梅氏的两个限制条件，由此建立通法。抵牾之处亦随之而解。其二，“知不知条目”及“定限条目”分别讨论球面三角形解的个数和有解的充分条件。球面三角形已知两角及其一对边、两边及其一对角，其解的个数的讨论是球面三角的难点之一。“知不知条目”就此给出完整的讨论。依已知条件求解球面三角形共六种情形，“定限条目”就六种情形给出有解的充分条件。上述工作表明，

---

① 详细的情况可参见汪宜楷. 汪莱年谱. 见：洪万生主编. 谈天三友. 台北：明文书局，1993

自明末以来传入中国的球面三角的初步知识至此已经发展为包括解法、画法、解的存在性及惟一性等理论的比较系统的知识。[1]

《衡斋算学》第四册后半为《递兼数理》，系对组合问题的研究。在中国数学史上，组合的实例并不少见而系统的研究当推该书为首。汪莱将组合作为一个数学问题第一次予以严谨的论述。"递兼"就是组合。该书所给的组合的定义如下：

"设如有物各种。自一物各立一数起，至诸物合并共为一数止，其间递以二物相兼为一数，交错以辨得若干数，三物相兼为一数，交错以辨得若干数，四物、五物以至多物莫不皆然，此谓递兼之数也。"

设有 n 个不同的物件，一物各立一数即 C_n^1，诸物合并共为一数即 C_n^n，二物相兼为一数即 C_n^2，等等。

汪莱给出的递兼总数即逐次组合的和 $\sum_{p=1}^{n} C_n^p$。它的求法是：

"以所设物数减一数为倍根之次数，乃以一为根，倍之加一得三为一次，又倍之加一得七为二次，如是累倍累加一，至如其次数而止。其末得之数即相兼之总数也。"

此即

$$\begin{aligned}&C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n\\&=\underbrace{2(2(\cdots 2(2}_{\text{共}n-1\text{个}2}\times 1+1)+1\cdots)+1)+1=2^n-1。\end{aligned}$$

汪莱还给出组合的一个性质：

"中数以后，即同于前，不烦覆算。"

"中数"即 C_n^1，C_n^2，…，C_n^n 诸数的中间项。与中间项距离相等的前后两项相等。即 $C_n^p=C_n^{n-p}$。

对于中间项序号的判别，汪氏指出：

---

[1] 李兆华. 衡斋算学校证. 西安：陕西科学技术出版社，1998. 10

“中数之位，于原设物数减去最大一数，取其余数之中。余数奇则有一中，偶得有二中。”

由 1，2，…，$n-1$，n 这 n 个数中去掉最后一项(即最大一数)，再由前 $n-1$ 项判别：$n-1$ 为奇数，有一中间项，即第$\frac{n}{2}$项；$n-1$ 为偶数，有二中间项，即第$\frac{n-1}{2}$和第$\frac{n+1}{2}$项。

对递兼总数 $\sum\limits_{p=1}^{n} C_n^p$ 而言，C_n^p 称为递兼分数。

“以所设物数即为各立一数之数。减一数为三角堆之根，乃以根数求得平三角堆为二物相兼之数。又减一数求得立三角堆为三物相兼之数。又减一数求得三乘三角堆为四物相兼之数。如是根数递减，乘数递加，求得相兼诸数。……此递兼之分数也。”

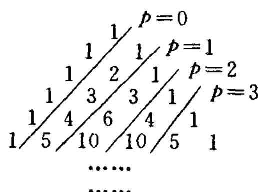


图 1.2.1　三角垛表

三角堆即三角垛。如图 1.2.1，贾宪三角形各斜行数字分别构成一个三角垛。当 $p=0$，1，2，3，…时分别称为元垛，一乘三角垛(平三角堆)，二乘三角垛(立三角堆)，三乘三角垛……汪氏在该书中给出三角垛求和法，即 p 乘三角垛前 n 项和为：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)。$$

汪氏递兼分数的求法即

$C_n^1=n$，

$$C_n^2=\sum_{r=1}^{n-1}r=\frac{1}{2!}(n-1)n,$$

$$C_n^3=\sum_{r=1}^{n-2}\frac{1}{2!}r(r+1)=\frac{1}{3!}(n-2)(n-1)n,$$

$$C_n^4=\sum_{r=1}^{n-3}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)=\frac{1}{4!}(n-3)(n-2)(n-1)n。$$

“如是根数递减，乘数递加，求得相兼诸数”：

$$C_n^p=\sum_{r=1}^{n-p+1}\frac{1}{(p-1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-2)$$

$$=\frac{1}{p!}(n-p+1)(n-p+2)\cdots(n-1)n。$$

此即

$$C_n^p=\frac{n!}{p!\ (n-p)!}。$$

汪莱的此项工作，赋予垛积术和贾宪三角形以组合的意义。

《衡斋算学》第三册、第六册分别讨论“有全弧通弦求五分之一弧通弦”和“有全弧通弦求三分之一弧通弦”，实为三角函数表造法的研究。第三册独立地给出公式 $l_5=5l-5\frac{l^3}{r^2}+\frac{l^5}{r^4}$，其中 l_5 表示本弧所对通弦，l 表示五分之一弧所对通弦。第六册改进《数理精蕴》中的算法，给出方程 $l_3=3l-\frac{l^3}{r^2}$，较小的正根 l 为所求，其中 l_3 表示本弧所对通弦，l 表示三分之一弧所对通弦。考虑到圆的半径、弦和弦所对的圆心角之间的关系，上两式可分别化为

$$\sin 5x=5\sin x-20\sin^3x+16\sin^5x$$

和

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x。$$

三角函数表造法始见于明末编译的《大测》二卷，用其给出的“六宗”、“三要法”、“二简法”造正弦表，间隔 45′ 直接得一正弦值。用三倍角公式可提高到间隔 5′，用五倍角公式则可提高到间隔 1′，从而正弦表的计算得以简化。“六宗”、“三要法”、“二简

法"、三倍角公式及汪莱的工作，使得三角函数表的古典造表法基本完善。①

汪莱的数学研究，以方程论的成就最为突出。方程论的研究集中在《衡斋算学》第二册、第五册、第七册中。

《衡斋算学》第二册指出，形如 $x(p-x)^2=q(p,q>0,0<x<p)$ 的方程可有二正根并给出解法。梅瑴成在编纂《数理精蕴》时指出，有勾股形面积、有勾弦和(或股弦和)求勾股形可归结为带两从相同和数立方求解。以勾股积、勾弦和为例，梅氏由方程

$$x^2\left(\frac{c+a}{2}-x\right)=\frac{\left(2\times\frac{1}{2}ab\right)^2}{2(c+a)}$$

解得 $x=a$ 为勾，进而求得 c，b。梅氏的方法正确，但囿于对方程正根的个数的认识及开带从和数立方法，他仅得一解而失掉一解。汪莱指出，有勾股积、勾弦和求勾股形，必得两勾弦较。两勾弦较各与勾弦和联立必得两勾股形。汪莱给出勾弦和与两勾弦较的关系：若 $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a_1b_1=\frac{1}{2}a_2b_2$，$c+a=c_1+a_1=c_2+a_2$，则

$$(c_1-a_1)(c_2-a_2)=\{(c+a)-[(c_1-a_1)+(c_2-a_2)]\}^2,$$

或即

$$\begin{cases}x_1x_2=G^2,\\ x_1+x_2=(c+a)-G。\end{cases}\tag{1}$$

其中，x_1，x_2 分别称为首率和末率，G 为中率。既得此关系，汪莱给出两勾弦较的求法。建立方程

$$G^2[G+(c+a)]=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a},\tag{2}$$

$$x\{[(c+a)-G]-x\}=G^2。\tag{3}$$

由(2)求得中率 G，代入(3)得长、阔二根分别为首、末二率，

---

① 李兆华．衡斋算学校证．西安：陕西科学技术出版社，1998．11

即两勾弦较。方程(2)有一正根，方程(3)有二正根。汪莱此法有且仅有两勾弦较。此法的关键是方程(2)的建立。汪氏建立方程(2)的过程大致如下：

因为$\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}=(2a)^2(c-a)=[(c+a)-(c-a)]^2(c-a)$，

设勾弦较$c-a=x$，则

$$x[(c+a)-x]^2=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}。\tag{4}$$

由于x有两解x_1，x_2，将x_1，x_2，分别代入(4)，得

$$x_1[(c+a)-x_1]^2=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a},$$

$$x_2[(c+a)-x_2]^2=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}。$$

两式左右分别相乘，所得等式两端同时开平方并注意到条件(1)，即得方程(2)。汪莱给出例子：若$\frac{1}{2}ab=210$，$c+a=49$，则有两勾股形20，21，29；12，35，37。此例相当于给出方程$x(49-x)^2=\frac{(4\times210)^2}{49}$合乎题意的二正根$x_1=9$，$x_2=25$。

汪莱之前，中国传统数学求解方程极少考虑多正根情形。汪莱上述工作第一次明确指出三次和三次以上的方程可有多于一个的正根。此项工作是中国传统数学的方程论发展中的转折点。同时，汪莱给出的等勾弦和两勾股形等积的充要条件(即条件(1))，对整数勾股形的研究及求解形如$x^2+xy+y^2=k$的二次不定方程的研究均有积极的意义。

在研究了《数书九章》和《测圆海镜》之后，汪莱在第五册算书中系统讨论了有实根的二次方程和三次方程的正根的个数，

无正根的情形不予讨论。有实根的二次方程和三次方程依各项系数符号不同共二十三个，除去开平、立方的三个，无正根的四个，其余十六个有正根。《衡斋算学》第五册列出了九十六条二次方程和三次方程，经整理归纳为十六个方程。比较可知，汪莱的十六个方程恰是上述有正根的十六个方程。有正根的二次方程和三次方程有一正根或多正根。汪莱认为，方程有一正根时所求的根“可知”，有多正根时所求的根“不可知”，有一正根或多正根时所求的根“可知或不可知”。汪莱给出的十六个九十六条方程，指明可知者九个五十二条，指明可知或不可知者一个八条，指明不可知者六个三十六条，兹总列如下，式中 a，b，c，$d>0$。

可知者：

$ax^2-bx-c=0$，　　（第一条等八条）

$ax^2+bx-c=0$，　　（第二条等八条）

$ax^3-cx-d=0$，　　（第三条等四条）

$ax^3+cx-d=0$，　　（第四条等四条）

$ax^3-bx^2-d=0$，　　（第七条等四条）

$ax^3+bx^2-d=0$，　　（第八条等四条）

$ax^3-bx^2-cx-d=0$，　　（第四十九条等六条）

$ax^3+bx^2-cx-d=0$，　　（第五十条等八条）

$ax^3+bx^2+cx-d=0$。　　（第五十二条等六条）

可知或不可知者：

$ax^3-bx^2+cx-d=0$。　　（第五十一条等八条）

不可知者：

$ax^2-bx+c=0$，　　（第五条等八条）

$ax^3-cx+d=0$，　　（第九条等四条）

$ax^3-bx^2+d=0$，　　（第十一条等四条）

$ax^3-bx^2+cx+d=0$，　　（第五十三条等六条）

$ax^3-bx^2-cx+d=0$，　　（第五十五条等八条）

$ax^3+bx^2-cx+d=0$。　　　（第五十七条等六条）

上述十六个方程经过变换归结为如下的十个基本方程，而后运用或变通《数理精蕴》所载开带从和较平立方法解之。式中 p，q，$r>0$。

$$x(p\pm x)=q,\qquad x^2(x\pm p)=q,$$
$$x(x+p)(x+q)=r,\qquad x^2(p-x)=q,$$
$$x^2(x+p)\pm qx=r,\qquad x^2(x-p)\pm qx=r。$$

变换是汪莱方程论的重要内容之一。现以五十一条及其补法为例说明之。

五十一条及其补法讨论方程

$$ax^3-bx^2+cx-d=0 \tag{5}$$

的解法。汪莱依 $d>\frac{bc}{a}$，$d<\frac{bc}{a}$，$d=\frac{bc}{a}$ 分别讨论并归结为基本方程，如表 1.2.1 所示。此处仅就部分情况做些说明。

表 1.2.1　方程 $ax^3-bx^2+cx-d=0$ 解法讨论

<table>
<tr><th>方程</th><th colspan="4">条　件</th><th>归结的基本方程</th></tr>
<tr><td rowspan="7">$ax^3-bx^2+cx-d=0$</td><td colspan="4">$d>\frac{bc}{a}$</td><td>带从扁立方有带方</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$d<\frac{bc}{a}$</td><td rowspan="5">$x^3-px^2+qx-r=0$ $(p=\frac{b}{a},$ $q=\frac{c}{a},$ $r=\frac{d}{a})$</td><td rowspan="3">$q>\left(\frac{p}{2}\right)^2$</td><td>$r=\frac{p}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$</td><td>径得 $y=0$</td></tr>
<tr><td>$r>\frac{p}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$</td><td rowspan="2">带从长立方有带方</td></tr>
<tr><td>$r<\frac{p}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$q<\left(\frac{p}{2}\right)^2$</td><td>带从长立方有带廉带方</td></tr>
<tr><td colspan="2">$q=\left(\frac{p}{2}\right)^2$</td><td>带从长立方</td></tr>
<tr><td colspan="4">$d=\frac{bc}{a}$</td><td>原文略</td></tr>
</table>

当 $d<\frac{bc}{a}$ 时，将(5)化为

$$x^3-px^2+qx-r=0, \tag{5.1}$$

其中，$p=\frac{b}{a}$，$q=\frac{c}{a}$，$r=\frac{d}{a}$。

作减根变换 $x=y+\frac{p}{2}$，上式变为

$$y^3+\frac{p}{2}y^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]y=r-\frac{p}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right] \qquad (5.2)$$

当 $q>\left(\frac{p}{2}\right)^2, r>\frac{p}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$时，以带从长立方有带方法开之，求得正根 y，从而得到 $x_1=y+\frac{p}{2}$为(5)的一正根。再解(5.1)的降阶二次方程

$$x^2-(p-x_1)x+\frac{r}{x_1}=0, \qquad (5.3)$$

当判别式$\left(\frac{p-x_1}{2}\right)^2\geqslant\frac{r}{x_1}$时，(5.3)有二正根，从而得(5)的三正根；当$\left(\frac{p-x_1}{2}\right)^2<\frac{r}{x_1}$时，(5.3)无实根，方程(5)只有一正根 x_1。

当 $q>\left(\frac{p}{2}\right)^2$，$r<\frac{p}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$时，对(5.2)作负根变换，即令 $y=-y'$，得

$$y'^3-\frac{p}{2}y'^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]y'=\frac{p}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]-r, \qquad (5.4)$$

简记为
$$y'^3-p_1y'^2+q_1y'=r_1,$$

其中，$p_1=\frac{p}{2}$，$q_1=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$，$r_1=\frac{p}{2}\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]-r$。继续作减根变换，每次以$\frac{p_i}{2}(i=1,2,\cdots,n-1)$为变换常数，直至此方程变为(5.2)型，则以上法解之。假定这种变换共进行$(n-1)$次，得

$$\begin{aligned}&w^3+5\left(\frac{p_{n-1}}{2}\right)w^2+\left[q_{n-1}+7\left(\frac{p_{n-1}}{2}\right)^2\right]w\\&=r_{n-1}-\frac{p_{n-1}}{2}\left[q_{n-1}+3\left(\frac{p_{n-1}}{2}\right)^2\right],\end{aligned} \qquad (5.5)$$

简记为
$$w^3+p_nw^2+q_nw=r_n,$$

其中，$p_n = 5\left(\frac{p_{n-1}}{2}\right)$，$q_n = q_{n-1} + 7\left(\frac{p_{n-1}}{2}\right)^2$，$r_n = r_{n-1} - \frac{p_{n-1}}{2}\left[q_{n-1}+3\left(\frac{p_{n-1}}{2}\right)^2\right]$。此时 $r_n>0$。依方程(5.2)求解一正根。由此可得方程(5)的一正根 $x_1=\frac{p}{2}+y=\frac{p}{2}-y'=\frac{p}{2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{p_i}{2}-w$。更依(5.3)对其进行判别。

汪莱指出，当 $d=\frac{bc}{a}$ 时，方程(5)有正根 $x=\frac{b}{a}$。事实上，方程(5)可变形为 $\left(x-\frac{b}{a}\right)(ax^2+c)=d-\frac{bc}{a}$，故其结论正确。

当方程(5)有三正根 x_1，x_2，x_3 时，汪莱给出根与系数的关系

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\frac{b}{a}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3=\frac{d}{a}。\end{cases}$$

汪莱对方程正根个数的讨论，其实已就简单情形揭示出笛卡尔符号法则。在对方程 $ax^3-bx^2+cx-d=0$ 的讨论时，汪莱给出可知或不可知的判别方法中蕴含着虚根共轭的意义。

在第五册的基础上，《衡斋算学》第七册进一步论述有实根的高次方程正根个数的出现规律和正根的判别条件。无实根者不予讨论。凡有正根者，汪莱称之为“有”，否则称之为“无”。联系到第五册的情形，可知汪莱对方程作如下的分类：

- 方程
  - 有实根的（可开）
    - 有正根的（有）
      - 有一正根的（可知）
      - 有多正根的（不可知）
    - 无正根的（无）
  - 无实根的（不可开）

第五册所论方程正根的可知、不可知为本册研究之起点。汪莱以举例方式显示正根出现的规律，其结论有下列两点。其一，乘积多项式正根的个数等于其相乘诸多项式正根个数之和，即“合而有数皆如本”。其二，乘积多项式的系数序列变号次数相同者其正根个数可相差一个偶数，即所谓“同式异理”。[①] 例如：

$2x^4-21x^3+78x^2-117x+68=0$，“此题无数”；

$x^4-13x^3+58x^2-108x+72=0$，“此题四数，同式异理”。

此例揭示的正根出现的规律较第五册所论三次方程的情形具有更明确的笛卡尔符号法则的意义。同时，所显示的虚根共轭的意义较第五册所论三次方程的情形亦更明确。

本册重点讨论有实根的方程正根的判别条件。其结论仍以举例方式予以说明。汪莱的思路大致可作如下理解。首先，将方程依项数分类；其次，就三项方程各种类型分别讨论其正根的个数，凡不必有正根者给出判别条件；再次，就四项方程各种类型分别讨论其正根的个数，凡不必有正根者可用减根变换使缺项成为三项方程予以讨论。五项及以上方程类推。三项方程的类型有 $x^n\pm px^m\pm q=0$，其中 n，m 是正整数，$n>m$，$p>0$，$q>0$。汪莱给出方程 $x^n-px^m+q=0$ 有正根的充要条件是

$$q\leqslant\frac{n-m}{n}p\left(\frac{m}{n}p\right)^{\frac{m}{n-m}}。$$

汪莱还讨论形如

$$x^3-px^2-qx+r=0,$$
$$x^3-px^2+qx+r=0,$$
$$x^3+px^2-qx+r=0\quad（其中\ p,q,r>0）$$

的三个四项方程，给出正根的判别条件。汪莱对方程正根的判别，虽仅以三项和四项方程为例，但其思想方法具有理论价值。

---

① 李兆华. 衡斋算学校证. 西安：陕西科学技术出版社，1998. 7

汪莱在方程论方面的工作标志着中国传统数学的方程分支由算法研究阶段进入理论研究阶段，可谓该分支发展史上的一个里程碑。

汪莱对进位制的研究见于《衡斋遗书》卷二的《参两算经》。《参两算经》在中国数学史上第一次系统讨论 p 进制($2\leqslant p\leqslant 10$)问题。其中给出 p 进制的乘法表，相宜的法(使除法的结果为整数或有限小数的除数 a($1<a<p$ 是整数)) 以及选择进位制的原则。

汪氏指出，各种进位制都遵循“逢身进位”的原则，如十进制逢十进一，九进制逢九进一等，这是 p 进制算法的大纲。按照这样的大纲，汪氏给出各种进制的乘法表。兹以九进制的乘法表为例，其写成现代的形式如下：

$8\times2=17$　$8\times3=26$　$8\times4=35$　$8\times5=44$　$8\times6=53$
$8\times7=62$　$8\times8=71$
$7\times2=15$　$7\times3=23$　$7\times4=31$　$7\times5=38$　$7\times6=46$
$7\times7=54$
$6\times2=13$　$6\times3=20$　$6\times4=26$　$6\times5=33$　$6\times6=40$
$5\times2=11$　$5\times3=16$　$5\times4=22$　$5\times5=27$
$4\times2=8$　$4\times3=13$　$4\times4=17$
$3\times2=6$　$3\times3=10$
$2\times2=4$

读如八二一七，八三二六等等。汪莱还说：“二三以后，统用前数。”即 2×3 等于前面已经给出 $3\times2=6$ 等等。这实际上是给出乘法交换律在 p 进制中仍可实行。

汪莱认为，乘法“因而重之，无难也”，除法“化而裁之”，其结果往往出现“不可终穷”的小数(此指无限循环小数)。若适当地选择进位制，可使商数为整数或有限小数。其选择进位制的原则是“审其数与法之宜”。汪莱给出 p 进制中相宜的法 a($1<a<p$)的值如表 1.2.2 所示。

表 1.2.2

进制	相宜的法
10	2，4，5，8
9	3
8	2，4
7	——
6	2，3，4
5	——
4	2
3	——
2	——

表中各数为法时，除法结果如下：

九进制

$\frac{1}{3}=0.3\quad \frac{2}{3}=0.6\quad \frac{3}{3}=1$

八进制

$\frac{1}{2}=0.4\quad \frac{2}{2}=1\quad \frac{1}{4}=0.2\quad \frac{2}{4}=0.4\quad \frac{3}{4}=0.6\quad \frac{4}{4}=1$

六进制

$\frac{1}{2}=0.3\quad \frac{2}{2}=1\quad \frac{1}{3}=0.2\quad \frac{2}{3}=0.4\quad \frac{3}{3}=1\quad \frac{1}{4}=0.13$

$\frac{2}{4}=0.3\quad \frac{3}{4}=0.43$①　$\frac{4}{4}=1$

四进制

$\frac{1}{2}=0.2\quad \frac{2}{2}=1$

汪莱还曾对《九章算术》进行校勘，其工作见于《衡斋遗书》卷五的《校正九章算术及戴氏订讹》。该篇仅存少广、商功、

① 以上三句原文有误。今依算校正。

均输、盈不足、方程等五章的校正和按语。其著作年代已不可考，原稿有无散佚也不清楚。汪氏校勘的数量不多，却大都很严谨。[①]其工作在《九章算术》进一步的研究中仍有参考价值。

汪莱的数学研究涉及方程论、球面三角、三角函数表造法、组合、进位制及《九章算术》校勘等几个方面。其著作的突出特点是富有创造性和理论价值。焦循评价说："孝婴之学深妙入微"，"人所言不复言。所言皆人所未言与人所不能言"。[②]的确，"从能力和水平来看，汪莱不仅是他那个时代，而且也是中国历史上的一流学者。"[③]

第三节 李锐及其《开方说》

李锐，字尚之，号四香。江苏元和(今苏州)人。清乾隆三十三年十二月八日(1769年1月15日)生，嘉庆二十二年六月三十日(1817年8月12日)卒，清代中叶杰出的数学家。

李锐"幼开敏，有过人之资，从书塾中捡得《算法统宗》，心通其义，遂为九章八线之学。"[④]他在乾隆五十三年(1788)成为元和县生员。转年正月，钱大昕来苏州主讲紫阳书院，李锐从其学习。乾隆五十五年(1790)，焦循以所著《群经宫室图》二部寄钱大昕，并分一部赠李锐，李锐函复谢之，是为焦、李交友之始。次年，李锐"肄业紫阳书院，从先生受算学。先生始教以三角八线、小轮椭圆诸法，复引而进之于古。"[⑤]在钱大昕门下，李锐又分别钻

① 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽. 济南：山东科学技术出版社，1992. 452

② 焦循. 石埭县儒学训导汪君孝婴别传. 衡斋算学遗书合刻. 咸丰四年(1854)，鄱阳县署刊本

③ 李迪. 清代著名数学家汪莱及其数学成就. 数学传播，1993，17 (3)：62

④ 阮元. 研经室二集·李尚之传. 文选楼刻本

⑤ 钱大昕. 三统术衍钤·李锐跋. 潜研堂丛书本

研了《大统历》、《回回历》及西洋人蒋友仁(M. Benoist，1715—1774)的《地球图说》等。

乾隆六十年(1795)，阮元任浙江学政，“因欲撰《畴人传》，开列古今中西人数及应采史、传、天、算各书，嘱锐编纂。”[①]李锐被阮元邀至杭州后，从事《畴人传》的编纂。在此期间，他常往来于苏杭之间，并得以广泛接触江南各藏书名家所收珍籍和文澜阁《四库全书》的抄本，对中国古代天文、数学中的一些代表作品进行了研究。在数学方面，他先后校勘和整理了李冶的《测圆海镜》、《益古演段》、王孝通的《缉古算经》及秦九韶的《数书九章》，并于嘉庆三年(1798)撰成《弧矢算术细草》一书。在天文学方面，他先后对三统、四分、乾象等历法进行了疏解。又在嘉庆四年(1799)春读《宋史·律历志》，悟得何承天调日法，撰《日法朔余强弱考》一卷。在经学方面，他曾协助阮元校勘《周易》、《孟子》等书，成果载入阮元编的《十三经注疏》之中。他还自撰《召诰日名考》等。

嘉庆五年十月，李锐在杭州阮元节署，与焦循共居署中诚本堂，“共论经史，穷天人消息之理”。[②]大约此时，李锐通过焦循了解到汪莱的工作。十一月，李锐返回苏州。汪莱于嘉庆六年(1801)撰成《衡斋算学》第五册，讨论秦九韶、李冶方根之“可知”与“不可知”，稿成后分别寄送张敦仁和焦循，焦循半年后将此书稿示与李锐。李锐认为“是卷穷幽极微，真算氏之最也”[③]，并“更以正负开方为说，括为三例”[④]，且于八月九日(1802年9月5日)写成跋文一篇，后汪莱将此跋文附入《衡斋算学》第六册中。这一年，李锐还为张敦仁校算《缉古算经细草》，并于十二月二十

① 罗士琳．续畴人传·李锐传，测海山房本

② 焦循．雕菰集．卷二十．诚本堂记．丛书集成本

③④ 衡斋算学第五册．李锐跋．衡斋算学遗书合刻本

日(1803年1月13日)为该书写成跋文一篇。

嘉庆十年(1805)，李锐前往扬州，为太守张敦仁的幕宾。是时，汪莱、沈钦裴、陈杰等学者亦在扬州，他们经常在一起讨论问题。张敦仁写成《开方补记》后，还请李锐为其校算。张敦仁觅得宋版《九章算术》(前五卷)、《孙子算经》、《张丘建算经》等典籍后，李锐也得以阅览并以微波榭本《算经十书》加以对校。

嘉庆十一年(1806)，李锐回到苏州。这一年的十月，他相继将《勾股算术细草》、《磬折说》和《戈戟考》等著作定稿，并且为张敦仁复校《求一算术》。次年，《勾股算术细草》一书由张敦仁在苏州校刊。嘉庆十三年(1808)，李锐撰成《方程新术草》并将书稿寄到北京给李潢。李潢回信说："读大作《方程新术草》一卷，正负相当各率，一出自然。正从前传刻之误，阐古人未发之覆，愉快弥日。《勾股细草》前岁古愚太守见惠一本，条段各图，细入毫芒，真精思大力之作也。"

嘉庆十五年(1810)，李锐在三月赴京参加顺天府试，六月初到达北京。虽然这次应试没有成功，但得与李潢晤谈。他还"在李云门侍郎寓邸见杂钞算书百余番，乃阮芸台中丞提调文颖馆时从《永乐大典》中摭录者，中有杨辉《摘奇》数条，始得略睹梗概"。在北京期间，李锐还收得黎应南等人为弟子。嘉庆十九年(1814)，李锐得到一部散乱的《杨辉算法》，"皆散叶，且颠倒错乱殊甚"，李锐遂"验其文义，排比整齐，得书六篇，首尾序目无缺失，亟命工装成一巨册，椟而藏之"。也正是在这一年秋季，李锐开始向黎应南讲授《开方说》(稿约成于嘉庆十八年)的主要内容。嘉庆二十一年(1816)，李锐读张敦仁寄来的《四元玉鉴》的抄本，对其中的"茭草形段"等问题作了注释，可惜因身体有病，未能完成全书的校释工作。第二年夏天，李锐病情恶化，咯血而死。他临终前再三叮嘱黎应南将其未定稿的《开方说》下卷写好，黎氏于是"谨遵先生遗命，依法推衍，非敢参以己见"，在嘉庆二

十四年(1819)将这部关于方程论的著作最终完成。

李锐一生没有固定的经济来源，主要依靠作幕宾来维持家庭生活和从事学术活动，因而他的生活经常处于贫困境地。但是他却能够安贫乐道，在逆境中坚持进行天文和数学研究，最终在学术上取得了辉煌的成就。

李锐的主要著作被收集在《李氏算学遗书》中。此书初刊于嘉庆年间，共11种18卷。其子目为：《召诰日名考》、《三统术注》、《四分术注》、《乾象术注》、《奉元术注》、《占天术注》、《日法朔余强弱考》、《方程新术草》、《勾股算术细草》、《弧矢算术细草》、《开方说》。李锐的其他著作还有《测圆海镜细草》、《海岛算经细草》、《缉古算经细草》、《回回历元考》等。

李锐对天文历法的研究体现出很强的数理倾向，其代表工作是《日法朔余强弱考》中关于古代调日法的研究。调日法是中国古代天文学家以分数来渐近表示朔望月长度的一种数理方法，但是"元明以来畴人子弟罔识古义，竟无知其说者"。对于《宋史·律历志》中"宋世何承天更以四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率，于强弱之际以求日法"这一记载，李锐是元代以后第一个予以重视并给出正确解释的学者。他指出：分别以$\frac{26}{49}$和$\frac{9}{17}$为强、弱率，何承天将朔望月的奇零部分表示为$\frac{26\times15+9+1}{49\times15+17+1}=\frac{399}{752}$，分母、分子分别称为"日法"、"朔余"。以此为契机，李锐又对古代51家历法所提供的数据进行考核，试图将每一历法的日法、朔余值表示成上述强、弱二率带权加成的形式，并以此来判断其与调日法有无关系。李锐创造了一种"以日法求强弱(数)"的方法，为的是把朔余与日法的比值表示为$\frac{26}{49}$和$\frac{9}{17}$的带权加成。若以A表示日法，x和y分别表示强、弱二数，李锐这一方法相当

于求解二元一次不定方程 $49x+17y=A$。其术文提供了一种依赖于求一术的简便算法，在中国数学史上第一次沟通了不定方程和同余式之间的关系。①

李锐对方程论的兴趣发轫于对李冶、秦九韶等宋元数学家著作的整理，但直接的导因却来自汪莱的《衡斋算学》第五册。汪莱读了秦、李之算书后发现书中有些题目所涉及的高次方程不止有一个正根。若方程只有一个正根称为“可知”，否则称为“不可知”，然后列出 24 个二次方程和 72 个三次方程，逐一讨论其“可知”或“不可知”。一年以后，李锐从焦循处得见汪莱著作的抄本，遂将其所列的九十六条“可知”或“不可知”概括成三例，被汪莱收入《衡斋算学》第六册中。这三例是：

“其一，凡隅、实异名，正在上负在下，或负在上正在下，中间正负不相间者，可知；

其二，凡隅、实异名，中间正负相间，开方时其与隅异名之从、廉皆翻而与隅同名者，可知；不者不可知；

其三，凡隅、实同名者不可知。”

第一例相当于说系数序列有一次变号的方程只有一个正根，第三例相当于说系数序列有偶数次变号的方程不止有一个正根。它们与 16 世纪意大利数学家 G·卡尔达诺(Cardano,1501—1574)提出的两个命题极为相似。第二例即变号奇数次但非一次者，如果开出一个正根后得到一个各项系数同号的降一次的方程，原方程就只有一个正根，否则不止一个正根。汪莱曾举出反例，否定了李锐的说法。这一点，很多数学史著作都已指出。经过与汪莱的反复辩论和商讨，李锐进一步完善了自己关于方程论的研究，最后把成果总结进《开方说》这一著作中。

---

① 刘钝. 李锐、顾观光调日法工作述评. 自然科学史研究，1987，6 (2)：148-152

《开方说》卷上首先给出实、法、方、廉、隅等相应于方程各项系数的术语的定义，在不失一般性的前提下为了简化陈述，按照秦九韶的方式规定了“实常为负”，然后讨论了正根个数与系数序列变号数之间的关系：

“凡上负、下正，可开一数；除一，平方三，立方八，三乘方二十。上负、中正、下负，可开二数；平方一，立方五，三乘方一十八。上负、次正、次负、下正，可开三数或一数；立方一，三乘方七。上负、次正、次负、(次)正、下负，可开四数或二数；三乘方一。”

这就是李锐关于符号法则的陈述。四句话分别论述系数序列的变号数为 1，2，3，4 的方程具有的正根个数。他还作出解释：

“假令有五位，上二位负，下三位正，即是上负、下正，非止谓上一位负下一位正也，它皆仿此。”

“除一，平方三，立方八，三乘方二十”，指系数序列仅有一次变号的一、二、三、四次方程各有 1，3，8，20 种不同类型的符号排列法。这表明系数序列有一次变号的方程有 32 个，具有二次变号的方程 24 个(平方一，立方五，三乘方一十八)，具有三次变号的方程 8 个(立方一，三乘方七)，和具有四次变号的方程 1 个(三乘方一)共 65 个方程，这实际上包括了所有不高于四次的常数项为负值的方程。

用现代数学语言来表达，李锐的四句话相当于说：若方程的系数序列出现一次变号，则有 1 个正根；出现两次变号，则有 2 个正根；出现三次变号，则有 3 个或 1 个正根；出现四次变号，则有 4 个或 2 个正根。无正根的情形不予讨论。这一认识与笛卡尔符号法则一致。

李锐还指出：

“凡可开三数或止一数，可开四数或止二数，其二数不可开，是为无数。凡无数必两，无无一数者。”

这是说，高次方程的正根个数不能常等于符号的变化次数，所缺少的正根，必定成对，没有缺少一根的情形。所论方程均无负根。

卷上的其他部分是比较详尽地叙述解数字高次方程的增乘开方法。

下面以解方程 $x^3-66x^2+590x-1680=0$ 为例，将李锐的算图和算草对照如下：

≣ ○	商	(1)[①]“初商五十正”
一 丅 ≚ ○	实	
丨 ○ 𝍤 ○ ○	加	(6)“以商五正乘之，得一万五百负”
丨 ＝ 丨 ≚ ○	实	(7)“以加实一千六百八十负，得一万二千一百八十负，为次商实”
≣ 𝍨 ○	方	
≚ ○ ○	减	(4)“又以商五正乘之，得八千负”
＝ 卜 ○	方	(5)“以减方五千九百正，不足减，反减之，余从二千一百负”
丨 ⊥ ○ ○	减	(10)“又以商五正乘之，得一万七千正”
丨 ≣ 𝍨 ○	方	(11)“以方二千一百负反减之，余一万四千九百正，为次商方，以上一变”
⊥ 丅	廉	
≣ ○	减	(2)“以初商五正乘隅一千正，得五千正”
一 丅	廉	(3)“以减廉六千六百负，余廉一千六百负”
≣ ○	减	(8)“变之：以商五正乘隅一千正，得五千正”
＝ 𝍣	廉	(9)“以廉一千六百负反减之，余廉三千四百正”
≣ ○	加	(12)“以商五正乘隅一千正，得五千正”
≟ 𝍣	廉	(13)“以加廉三千四百正，得八千四百正，为次商廉，以上二变”
一	隅	

图 1.2.2

① 括号中的数字表示运算的步骤。

𝍫 𝍥	商	（17）“次商六正”
𝍠 𝍪 𝍠 𝍰 〇	实	
𝍠 𝍪 𝍠 𝍰 〇	减	（22）“又以商六正乘之，得一万二千一百八十正”
〇	实	（23）“以减实一万二千一百八十负，适尽”
𝍩 𝍣 𝍱 〇	方	（14）“变讫，方退一位”
𝍤 𝍬 〇	加	（20）“又以商六正乘之，得五百四十正”
𝍪 〇 𝍫 〇	方	（21）“以加方一千四百九十正，得方二千三十正”
𝍰 𝍣	廉	（15）“廉退二位”
𝍥	加	（18）“以商六正乘隅一正，得六正”
𝍱 〇	廉	（19）“以加廉八十四正，得廉九十正”
𝍠	隅	（16）“隅退三位”

图 1.2.3

李锐推求符号法则的思路是建立在对增乘开方程序的算理分析之上的。①

卷中引进了负根的概念并阐释作者自己提出的“代开法”。

卷中一开始就明确指出“凡商数为正，今令之为负。”这是中国数学史上第一次明确谈到负根的文字。

李锐代开法分为寄位代开和较数代开二法。其法求得方程一根后以递降一阶的方程求原方程的其余实根。

寄位代开法曰：

“其法以本乘方先开一数，副置先开数，加减（同名减，异名加）末商名曰寄位。以其余递降一乘开之，所得加减寄位（同名加，异名减）为又一数。”

以方程 $x^3-151x^2+2838x-14040=0$ 求得三根 130，12，9 为例，其法可表述如下。为叙述方便，原文筹码、竖行、进退兹皆不计而以阿拉伯数码及横式表示之。

---

① 刘钝．李锐与笛卡儿符号法则．自然科学史研究，1989，8(2)：134

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -151 & 2838 & -14040 & 100 \\
 & 100 & -5100 & -226200 & \\
\hline
1 & -51 & -2262 & -240240 & \\
 & 100 & 4900 & & \\
\hline
1 & 49 & 2638 & & \\
 & 100 & & & \\
\hline
1 & 149 & & &
\end{array}
\qquad (1)
$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & 149 & 2638 & -240240 & 30 \\
 & 30 & 5370 & 240240 & \\
\hline
1 & 179 & 8008 & 0 &
\end{array}
\qquad (2)
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
1 & 179 & 8008 & -80 \\
 & -80 & -7920 & \\
\hline
1 & 99 & 88 & \\
 & -80 & & \\
\hline
1 & 19 & &
\end{array}
\qquad (3)
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
1 & 19 & 88 & -8 \\
 & -8 & -88 & \\
\hline
1 & 11 & 0 &
\end{array}
\qquad (4)
$$

算式(1)表示

$$
\begin{aligned}
& x^3-151x^2+2838x-14040 \\
&=(x-100)^3+149(x-100)^2+2638(x-100)-240240 \\
&=0。
\end{aligned}
$$

算式(2)表示

$$(x-100)^3+149(x-100)^2+2638(x-100)-240240$$

$$=(x-130)\ [(x-100)^2+179(x-100)+8008]$$
$$=0。$$

由此可得 $x=130$ 和关于 $(x-100)$ 的方程

$$(x-100)^2+179(x-100)+8008=0,$$

其中 100 称为寄位。

算式(3)表示

$$(x-100)^2+179(x-100)+8008$$
$$=[(x-100)+80]^2+19\ [(x-100)+80]\ +88$$
$$=0。$$

算式(4)表示

$$[(x-100)+80]^2+19\ [(x-100)+80]\ +88$$
$$=[(x-100)+88]\ \{[(x-100)+80]\ +11\}$$
$$=[(x-100)+88]\ [(x-20)+11]$$
$$=0。$$

由此可得 $x-100=-88$，即 $x=12$ 和关于 $(x-20)$ 的方程

$$(x-20)+11=0,$$

其中 20 称为寄位。由此可得 $(x-20)=-11$，即 $x=9$。故原方程的根是 130，12，9。

较数代开法曰：

“以本乘方先开一数，讫，变之，以递降一乘代开之，所得为较数。以较数加减(同名加，异名减)先得数，为又一数。”

为与寄位代开法比较仍用前例。此法系将算式(2)继续变换如下：

1	149	2638	−240240	30
	30	5370	240240	
1	179	8008	0	
	30	6270		
1	209	14278		
	30			
1	239			

(5)

1	239	14278	−100
	−100	−13900	
1	139	378	
	−100		
1	39		

(6)

1	39	378	−10
	−10	−290	
1	29	88	
	−10		
1	19		

(7)

1	19	88	−8
	−8	−88	
1	11	0	
	−8		
1	3		

(8)

由算式(1)、(5)可知，原方程为

$$x^3-151x^2+2838x-14040$$

$$=(x-130)^3+239(x-130)^2+14278(x-130)$$
$$=0。$$

由此可得 $x=130$ 和关于 $(x-130)$ 的方程

$$(x-130)^2+239(x-130)+14278=0。$$

由算式(6)、(7)、(8)可知

$$(x-130)^2+239(x-130)+14278$$
$$=[(x-130)+118]^2+3[(x-130)+118]$$
$$=[(x-130)+118]+[(x-12)+3]$$
$$=0。$$

由此可得 $x-130=-118$，即 $x=12$ 和关于 $(x-12)$ 的方程

$$(x-12)+3=0。$$

解此方程可得 $x=9$。其中 -118，-3 称为较数。

由上例可见，寄位是降阶方程未知元中的常数项。李锐由先得之根加减末商求之，以寄位加减降阶方程的根得原方程的根，较数是降阶方程的根，以较数加减先得之根得原方程的根。显然，寄位代开法和较数代开法皆以降阶的方程求原方程的另根。前者求解商式，而后者求解变式。如上例求第二个根 12，两法分别求解方程

$$(x-100)^2+179(x-100)+8008=0$$

和

$$(x-130)^2+239(x-130)+14278=0。$$

相比之下，较数代开法的步骤更为简明。代开法的创立使得正负开方术成为求解方程实根的一般方法。①

《开方说》卷下介绍了重根概念和根与系数的关系，又讨论了各种方程变形。

在中国古代数学著作里，李锐第一个谈到重根问题。《开方

① 李兆华．正负开方术札记二则．见：李兆华．古算今论．天津：天津科学技术出版社，2000．233

说》卷下说："凡可开二数以上而各数俱等者，非无数也，以代开法入之可知。"

李锐在《开方说》卷下还指出："凡有正负各数，累乘之，即得实方廉隅各数。"这即是他对根与系数的关系的探讨。他认为高次方程的所有系数可由其各根确定，所用的方法是"累乘"。由书中所举算例可以看出，其实际是多项式乘法。①

李锐除了在求根过程中使用了前人业已掌握的减根变换、倍根变换外，还给出一些其他的方程变换，略举几例如下。

1. "凡实方廉隅，如意立一数为母，遍乘之，如法开之，所得与不乘同。"

这即是说方程

$$ka_nx^n+ka_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ka_1x+ka_0=0$$

与方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\ (a_n\neq 0) \tag{9}$$

同解。这个变换是将方程诸系数"有之分者"、"通之"的理论依据。

2. "凡实方廉隅，如意立一数为母，一乘隅，再乘廉，三乘方，四乘实。每上一位，则增一乘，如是累乘讫，如法开之，所得为母乘所求数之数，以母除之得所求。"

这是说方程

$$ka_nx^n+k^2a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k^na_1x+k^{n+1}a_0=0$$

的根是方程(9)的根的 k 倍。

3. "凡实方廉隅，如意立一数为母，一除隅，再除廉，三除方，四除实，每上一位，则增一除，如是累除讫，如法开之，所得为母除所求数之数，以母乘之得所求。"

---

① 朱家生．李锐《开方说》方程理论初探．见：梅荣照主编．明清数学史论文集．南京：江苏教育出版社，1990．308

表明方程

$$\frac{a_n}{k}x^n+\frac{a_{n-1}}{k^2}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{k^n}x+\frac{a_0}{k^{n+1}}=0$$

的根是方程(9)的根的$\frac{1}{k}$。

这两个特殊的倍根变换，可以把较为复杂的高次方程转化为简单的整系数方程求解。

4. “凡开方有正商、负商者，以其实方廉隅之正负遍易之，如法开之，所得之正商、负商与不易同。”

这是说方程

$$-a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0=0$$

与方程(9)同解。

5. “凡开方有正商、负商者，以其实方廉隅之正负隔一位易之，如法开之，则所得正商变为负商，负商变为正商。”

这是介绍负根变换，即方程

$$(-1)^na_nx^n+(-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}+\cdots-a_1x+a_0=0$$

或

$$(-1)^{n+1}a_nx^n+(-1)^na_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x-a_0=0$$

的根与方程(9)的根互为相反数。

李锐的《开方说》不仅是一本介绍开方法的专著，更是一部研究高次方程理论的专著。他提出了方程正根个数判定的符号法则；引进了负根和重根的概念；创造了先求出一根的首位，再由变形方程续求其余位数字乃至其余根的“代开法”；完善了倍根变换、减根变换、负根变换等方程变形法。这些内容标志着李锐在方程论领域的工作突破了中国古典代数学的范围，成为清代数学史上一个引人注目的理论成果。[①]

① 刘钝．李锐．见：杜石然主编．中国古代科学家传记．下集．北京：科学出版社，1993．1150．

第四节　博启及其《勾股形内容三事和较》

博启（亦作伯启），字绘亭，满洲正白旗人，生卒年代不详。据故宫钦天监档案，仅知其于乾隆五十年（1785）至五十八年（1793）为五官正，五十八年十二月被提升为钦天监监副。博启著有《勾股形内容三事和较》一书，该书有乾隆四十八年（1783）自序，今传道光元年（1821）姚元之抄本，现藏北京图书馆。

勾股形内容三事系指勾股形的弦上的高线、内接正方形的边长及内切圆的直径这三个元素。和即加，较即减。勾股形内容三事任知其二，借助和、较求解勾股形的三边，是为《勾股形内容三事和较》一书的主要内容。《数理精蕴》下编卷十二有"勾股形内求中垂线及容方圆等形"一节，集中讨论由勾、股、弦求内容三事的算法，《勾股形内容三事和较》一书即在此启发下对由内容三事借助和较求勾、股、弦问题给出系统的讨论。博启在书的序言中写道："《数理精蕴》立勾股相求之法三：一为勾股弦互相求，一为勾股弦和较相求，一为勾股形内容中垂线、方、圆等形。夫互相求者，乃勾股求弦或股弦求勾或勾弦求股，是用勾股弦之整数，知其二以求其一也。而和较相求者，乃勾股弦三线互相和较以求之，但知和较之二数以求勾股弦也。至内容中垂线、方、圆等形，止以勾股形求其三线而已，似于中垂线、圆径、方边之义有未尽焉耳。故近有以此三线亦作互相求而得勾股弦者。……今既可以此三线作互相求而得勾股弦，又岂不可以作和较相求而得勾股弦乎？启幼入算学，酷好勾股，历经三十余年，粗通其意，故不揣冒昧，谨依勾股弦和较相求之式，拟成内容方边、圆径、中垂线和较相求六十题，即名曰《勾股形内容三事和较》。"[1]

① 博启．勾股形内容三事和较·序．道光元年（1821）姚元之抄本

《勾股形内容三事和较》一书不分卷，由下面八部分组成：

(1)总论(包括：总图、方边中垂线合图说、圆径中垂线合图说、方边圆径合图说、三事和较全图说等节)

(2)解略篇四则

(3)等积形说八图

(4)六十题总目[①]

(5)前法十

(6)中法三十八

(7)后法十二

(8)绘图分数

其中，“总图”中给出了勾、股、弦、中垂线、内容方边、内容圆径等概念，然后以之为基础直观地证明了“方边中垂线合图说”、“圆径中垂线合图说”、“方边圆径合图说”及“三事和较全图说”。这四个“图说”相当于四条基本定理，是后面“等积形说”中证明的基础。“解略篇”系对后面要用到的概念的简称作出说明。“等积形说八图”以前面两部分为基础，证明了八个等式，相当于八条定理，它们是以后解题的基础。第(4)至(7)四个部分是六十个题的题目和解法。在最后一部分“绘图分数”中，博启给出勾六千、股八千、弦一万的勾股形的内容三事(中垂线长 4800，圆径长 4000，方边约为 3428)以及三事和较及和较之和较的具体数值以供参考。

“总图”如图 1.2.4 所示，勾股形甲乙丙中，甲乙为勾，甲丙为股，乙丙为弦，甲丁为中垂线，戊己庚为内容圆，辛戊、辛己、辛庚皆为容圆半径，壬甲癸子为内容方，壬甲、甲癸、癸子、子

① 经过与“中法三十八”相对照，发现此“六十题总目”中误将第十四题的题目写在第十五题的题号后，表面看起来是缺少第十四题，而实际上缺少第十四题的题号和第十五题的题目。

壬皆为方边。

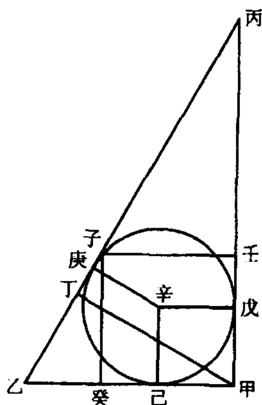


图 1.2.4

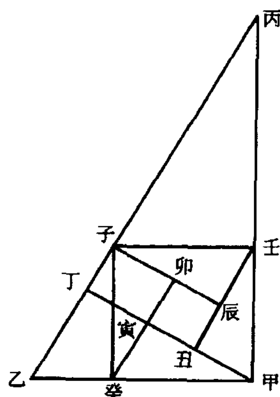


图 1.2.5

"方边中垂线合图说"如图 1.2.5 所示，勾股形甲乙丙中，甲丁为中垂线，壬甲癸子为内容方。以内容方边为弦作勾股形，得壬丑甲、壬辰子等四个。由图可知，甲丁＝甲丑＋丑丁＝甲丑＋子辰，此即表明中垂线为以内容方边为弦的勾股形的勾股和。

"圆径中垂线合图说"如图 1.2.6 所示，勾股形甲乙丙中，甲丁为中垂线，辛庚、辛己、辛戊为内容圆半径。过圆心辛作巳午//乙丙，得巳甲午勾股形，则对它而言，辛戊类半径为其方边，甲未为其中垂线。由"方边中垂线合图说"，甲未为以辛戊等方边为弦的勾股形的勾股和。又因丁未＝辛庚＝辛戊，故甲丁为勾股弦总和。即中垂线是以内容圆半径为弦的勾股形的勾股弦总和。如果以内容圆径为弦作勾股形，则中垂线为半总和。

"方边圆径合图说"如图 1.2.7 所示，其中壬甲癸子为勾股形甲乙丙的内容方，辛戊、辛己、辛庚为内容圆半径。过圆心辛作辛酉//甲丙，辛申//甲乙，[①] 这样得到辛酉申勾股形。辛庚为其中

① 即是将己辛、戊辛延长，分别与丙乙弦相交。

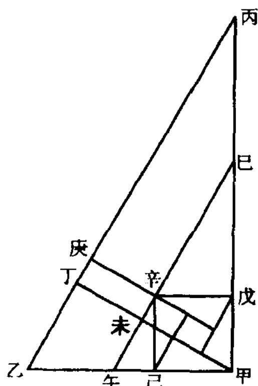


图 1.2.6

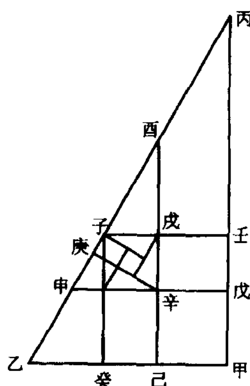


图 1.2.7

垂线，戌子(半径与方边之较)等为其方边。由“方边中垂线合图说”，以戌子类方边为弦的勾股形，辛庚为其勾股和。又辛庚＝辛戊＝壬戊，故壬子方边为勾股弦总和。即内容圆半径为勾股和，内容方边则为勾股弦总和。如果内容圆径为勾股和，则方边即为半总。

“三事和较全图说”如图 1.2.8 所示，依“方边中垂线合图说”，以一个勾股形内容方边为弦，中垂线为勾股和作甲乙丙勾股形，称之为“会勾股”。又依“方边圆径合图说”，以乙丙方边为半总，作乙戊、戊丁勾股和为内容圆径，成乙戊丁勾股形，称之为“通勾股”。过丁作丁癸∥甲乙，则

$$
\begin{aligned}
&\text{丁癸}+\text{癸丙}\\
&=\text{戊甲}+\text{癸丙}\\
&=(\text{甲乙}-\text{乙戊})+(\text{甲丙}-\text{甲癸})\\
&=(\text{甲乙}+\text{甲丙})-(\text{乙戊}+\text{戊丁})\\
&=\text{中垂线}-\text{圆径}。
\end{aligned}
$$

又因为　$\text{乙丙}=\frac{1}{2}(\text{乙戊}+\text{戊丁}+\text{丁乙})=\frac{1}{2}(\text{圆径}+\text{丁乙})$，

所以　　丁乙＝2乙丙－圆径。

故　　丁丙＝乙丙－乙丁＝圆径－乙丙＝圆径－方边，

则　　丁癸＋癸丙＋丙丁＝中垂线－方边。

勾股形丁癸丙称为“隅勾股”。

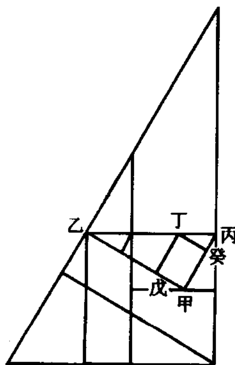


图 1.2.8

“解略篇四则”给出勾股形及其中元素的名称，并对各事和较给出约定。“会勾股”的三边分别称为会勾、会股、会弦；“通勾股”的三边分别称为通勾、通股、通弦；“隅勾股”的三边分别称为隅勾、隅股、隅弦。在图 1.2.8 中，乙丙是方边、是会弦，也是通半总；圆径是通勾股和(乙戊＋戊丁)；中长(中垂线的长)是会勾股和(甲乙＋甲丙)；隅弦(丁丙)是方圆较(圆径－方边)，也是通半径[①]；方中较(中长－方边)是隅总和，也是通中长[②]；圆中

① 因为　勾股形内切圆直径＝勾＋股－弦，

所以　丁丙＝乙丙－乙丁

$=\frac{1}{2}$(通勾＋通股＋通弦)－通弦

$=\frac{1}{2}$(通勾＋通股－通弦)

＝通半径。

② 通半径即为隅弦，由“圆径中垂线合图说”，知通中长即为隅总和。

较(中长－圆径)即是隅勾股和。对于和较，博启约定：二事和较，“只指上一字呼之”，如方边与圆径较或和称为方圆较或方圆和；如中垂线与方边、圆径的和之较，则称为中和较，其余仿此；中垂线、方边、圆径之和称为三事和。

由“三事和较全图说”看到，会勾股、通勾股和隅勾股这三个勾股形显然是相似的。应用“相似三角形的对应边成比例”这一性质以及比例的一些性质，博启在“等积形说八图”中给出八个等式，相当于八条定理，是解六十题的基础。

1. “圆中较乘方边，方圆较乘中长，半方中较乘圆径，此三形积等。”

因为　隅弦：隅勾股和＝会弦：会勾股和，

所以　隅弦×会勾股和＝会弦×隅勾股和，

亦即　方圆较×中长＝方边×圆中较。

又因为　隅勾股和：隅半总＝通勾股和：通半总，

即　圆中较：半方中较＝圆径：方边，

所以　方边×圆中较＝半方中较×圆径。

2. “方圆较乘方边，半方中较乘方圆较与方边之较，此二形积等。”

因为　隅弦：隅半总＝通弦：通半总，

且　通弦＝会弦－隅弦＝方边－方圆较，

所以　方圆较：半方中较＝(方边－方圆较)：方边。

故　方圆较×方边＝半方中较×(方边－方圆较)。

3. “方边乘圆径，方圆较与方边之较乘中长，此二形积等。”

因为　通弦：通勾股和＝会弦：会勾股和，

所以　(方边－方圆较)：圆径＝方边：中长。

故　方边×圆径＝中长×(方边－方圆较)。

4. “方边乘中长，圆径乘半方中和，此二形积等。”

由　通半总：通勾股和＝会半总：会勾股和，

且　　会半总$=\frac{1}{2}$(会弦+会勾股和)

$=\frac{1}{2}$(方边+中长)

=半方中和，

有　　方边∶圆径=半方中和∶中长，

故　　方边×中长=圆径×半方中和。

5. “方圆较乘方中较，方圆较与圆中较之较乘方边，此二形积等。(附：方圆较自乘倍之，与方圆较与圆中较之较乘方圆较与方边之较等)”

由　通半径∶通半总=隅圆径∶隅总和，

且　　隅圆径=隅勾+隅股-隅弦

=隅勾股和-隅弦

=圆中较-方圆较，

有　　方圆较∶方边=(圆中较-方圆较)∶方中较，

故　　方圆较×方中较=方边×(圆中较-方圆较)。

又因为　通弦∶通圆径=隅弦∶隅圆径，

所以　　通弦×隅圆径=隅弦×通圆径。

又由于　　隅圆径=圆中较-方圆较，

通弦=方边-方圆较，

通圆径=2通半径=2隅弦，

隅弦=方圆较，

所以　　2方圆较^2=(圆中较-方圆较)×(方边-方圆较)。

6. “方圆较乘圆径，圆中较乘方圆较与方边之较，此二形积等。”

由　隅弦∶隅勾股和=通弦∶通勾股和，

得　　方圆较∶圆中较=(方边-方圆较)∶圆径，

故　　方圆较×圆径=圆中较×(方边-方圆较)。

7. “圆中较乘倍方圆较，圆径乘方圆较与圆中较之较，此二

形积等。”

由

隅圆径：隅勾股和＝通圆径：通勾股和，

并注意到

隅圆径＝圆中较－方圆较，

通圆径＝倍通半径＝倍方圆较，

可得　(圆中较－方圆较)：圆中较＝倍方圆较：圆径。

故　圆中较×倍方圆较＝(圆中较－方圆较)×圆径。

8. “方中较乘中长，圆中较乘方中和，此二形积等。”

因为　隅勾股和：隅总和＝会勾股和：会总和，

且　会总和＝会勾股和＋会弦＝中长＋方边

＝方中和，

所以　圆中较：方中较＝中长：方中和，

故　方中较×中长＝圆中较×方中和。

下面从六十个题目及解法中选出几例，以说明博启的方法。

第一题　“有方边，有圆径与中垂线之较，求勾、股、弦。”

由“等积形说”第一图，有

方边×圆中较＝方圆较×中长，

记方边为 A，圆中较为 D，方圆较为 C，中长为 B，则有①

$$AD=BC。$$

显然，又有

$$B-C=A+D。$$

将此二式联立，可得

$$C^2+(A+D)C-AD=0,$$

$$B^2-(A+D)B-AD=0,$$

其中 A，D 为已知。故解一元二次方程可求得 B，C，再考虑到题

① 略去术文原文，将术文用现代数学语言表示。下几题同。

设条件，即可求得方边、圆径和中长。

又由于　　圆径＝勾＋股－弦，

中长＝勾×股/弦，

方边＝勾×股/(勾＋股)，

从此可由多种途径求出勾、股、弦。博启一定是熟知这些方法，他在“解略篇”中最后一则说：“六十题俱以勾、股、弦为问，而法中止答得方边、圆径、中垂线则已，盖有此三线即可以互相求而得勾、股、弦也，故不复赘。”

第十题　“有方边与圆径之较，有方边与中垂线之较，问勾、股、弦。”

由“等积形说”第五图，有

方圆较×方中较＝方边×(圆中较－方圆较)。

记 A＝方圆较，D＝方中较，B＝方边，C＝圆中较－方圆较，

则有　　$AD=BC$。

又　　$C=(D-A)-A$，

将二式联立，得

$$AD=B(D-2A),$$

故　　$B=AD/(D-2A)$。

因为 A，D 为已知，所以 B 可求，即方边可求。再由 A，D 可求出圆径、中垂线，则勾、股、弦可求。

第十三题　“有方边与圆径之和，有方边与中垂线之较，问勾、股、弦。”

记 h＝方边，d＝圆径，l＝中垂线。

由“等积形说”第五图，有

$$\frac{d-h}{h}=\frac{(l-d)-(d-h)}{l-h}。$$

由比例的性质，得

$$\frac{d}{h}=\frac{2(l-d)}{l-h}。$$

于是
$$\frac{d+h}{h}=\frac{3l-2d-h}{l-h},$$

即
$$\frac{d+h}{2h}=\frac{\frac{3}{2}l-d-\frac{1}{2}h}{l-h}。$$

故有
$$(d+h)(l-h)=2h\cdot(\frac{3}{2}l-d-\frac{1}{2}h)。$$

又
$$2h-(\frac{3}{2}l-d-\frac{1}{2}h)=(d+h)-\frac{3}{2}(l-h),$$

将二式联立，得

$$4h^2-[2(d+h)-3(l-h)]h=(d+h)(l-h)。$$

式中 $d+h$，$l-h$ 为已知，故这是一个关于 h 的一元二次方程，解之得 h。再由题设条件，l，d 可求，进一步可求出勾、股、弦。

第四十二题　“有圆径与中垂线之和，有中垂线与方圆较之较，问勾、股、弦。”

由“等积形说”第三图，且记 h＝方边，d＝圆径，l＝中垂线，

则有
$$\frac{h-(d-h)}{d}=\frac{h}{l}。$$

由比例性质，得

$$\frac{2h}{d}=\frac{h+l}{l}=\frac{3h+l}{d+l}。$$

同理可得
$$\frac{h+l+l}{l}=\frac{3h+l+d+l}{d+l},$$

即
$$\frac{(h+l)+l}{l}=\frac{2(l+d+h)-(d-h)}{l+d},$$

亦即　$(l+d)[(l+h)+l]=l[2(l+d+h)-(d-h)]$。

又　$5l+[2(l+d+h)-(d-h)]=4(l+d)+3[l-(d-h)]$，

记　$A=l+d$，$B=l-(d-h)$，$T=2(l+d+h)-(d-h)$，

在上两式中消去 T，得

$$5l^2-(4A+3B)l+A(A+B)=0,$$

其中 A，B 为已知。这是关于 l 的一元二次方程。解此方程求得 l，

再由题设，d，h 可求。然后可求出勾、股、弦。

由上面几个例题可以看出博启的解题过程：由“等积形说”中的某一等式得到一个方程(此方程左右两端分别为两个因式的乘积，一端的两个因式均可由题设条件推得，另一端的两个因式均为未知。即方程为 $xy=mn$(x，y 未知，m，n 已知)形式)，再由此方程中未知的两个因式和题设条件可得另一个方程(此方程一端为那两个未知因式的代数和，另一端为题设中的一个因式或题设中的两个因式的代数和，即形式为 $k_1x\pm k_2y=k_3m\pm k_4n$，$k_i\geqslant 0$)。将此二方程联立，得出一个一元二次方程(有时 k_1 或 k_2 中某个为0，则不需联立即可得一个一元一次方程)，解此方程，得出三事或三事和较之一，再由题设可得三事。博启在解题过程中使用了较严谨的逻辑推理方法，条理清楚，层次分明，这在古算书之中并不多见。可以认为，这是传统数学方法向演绎方法的转变。

另外，中国传统数学对于求解勾股形以及构造满足给定条件的勾股形有深入研究。《周髀算经》勾股圆方图赵爽注、《九章算术》勾股卷及刘徽注、《测圆海镜》、《勾股算术》及《勾股举隅》等都是这方面的优秀著作，但它们均未论及由三事求勾、股、弦的方法。从这个角度来看，博启的工作在勾股形诸元素的互求问题上是有独到之处的。

第五节　孔广森、张敦仁、骆腾凤的工作

一、孔广森及其《少广正负术内外篇》

孔广森(1752—1786)，字众仲，又字㧑约，号顨轩，山东曲阜人，孔子第七十代孙，清代中叶著名的经学家、音韵学家和数学家。他在乾隆三十六年(1771)中进士，被选入翰林院，官至检讨，敕受文林郎。三年后，辞官居家，潜心著述，其著作都收入《顨轩所著书》中。其中的第六种即是孔广森的数学著作——《少

广正负术内外篇》六卷。

孔广森少曾师事戴震，及官翰林，与窥中秘。由是精研九数，学益大进。他是清代最早研究宋元算书的人，曾批校过《测圆海镜》。所批仅及第一、二、三、七等四卷，是在李锐之先。[①]

《少广正负术内篇》三卷，讲述平、立、三乘方诸开法。其方法可大致表述如下：[②] 对于方程 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$，得到初商 x_1 后余实 e_2，孔广森设次商为 x_2，以 $b(x_1+x_2)^2+d$ 为右定，$a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c$ 为左泛，$(2x_1+x_2)\{a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}$ 为左定，则次商

$$x_2=\frac{\text{余实}}{\text{右定}+\text{左定}}$$

$$=\frac{-e_2}{[b(x_1+x_2)^2+d]+(2x_1+x_2)\{a[x_1^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}}。$$

《少广正负术外篇》卷上包括“割圆弧矢”十条，“新设三角法”六条，“方田杂法”二条，“推秦氏方斜求圆算草”一条，“堆垛”一条；卷中包括“勾股和较难题”十二条，“勾股幂难题”三条，“勾股边幂相求难题”十六条，“勾股容方难题”二十四条，“勾股中长难题”十条，“勾股不同式难题”一条；卷下包括“斛方补问”及订正《算法统宗》求筑堤法一则。可见，孔氏的《少广正负术外篇》三卷，其讨论内容系高次方程的应用。下面将其主要内容分述如下。

“割圆弧矢”主要讨论圆的直径、弓形的矢和弧长间的互求方法。孔氏给出了四个弧幂求矢（已知圆的直径和弓形面积，求矢）的近似公式。设圆的直径为 d，圆面积为 S，弧幂为 A，矢为 h。

---

① 李俨．中算史论丛．第四集．北京：科学出版社，1955．24

② 转引自李俨．中算家的方程论．见：李俨．中算史论丛．第一集．北京：中国科学院出版，1954．269

当 $A>\frac{1}{5}S$ 时，$h=\sqrt[3]{\frac{A^2}{1.5d}}$；

当 $\frac{1}{15}S<A<\frac{1}{5}S$ 时，$h=\sqrt[3]{\frac{(3A)^2}{27d}}$；

当 $\frac{1}{30}S<A<\frac{1}{15}S$ 时，$h=\sqrt[3]{\frac{(5A)^2}{81d}}$；

当 $A<\frac{1}{30}S$ 时，$h=\sqrt[3]{\frac{(7A)^2}{81d}}$。

孔氏的方法比较简单，且比古法精确。

孔广森还推导了已知直径及弧长求矢的一个四次方程，用现代数学符号可表述如下：

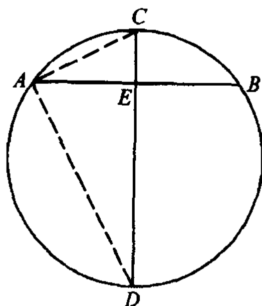


图 1.2.9

如图 1.2.9，已知圆的直径 $CD=d$，弓形 ACB 的半弧长 $\overset{\frown}{AC}=s$，求弓形的矢 CE 的长。设 $CE=h$，则有关于 h 的方程：

$$h^4+(d^2-2sd)h^2-d^3h+d^2s^2=0 \tag{1}$$

由于“全径除矢幂所得数即为半弧背与正弦之差”，即 $\frac{h^2}{d}=s-a$[①]，

① 这个公式源于沈括会圆术。沈氏的公式，用相同的符号可表示为 $\frac{2h^2}{d}+2a=2s$。

这里 a 为半弦 AE 的长，古称正弦。故 $a=s-\frac{h^2}{d}$。

又△ACD 是直角三角形，AE 是斜边上的高，故

$$AE^2=CE\cdot DE,$$

即
$$\left(s-\frac{h^2}{d}\right)^2=h(d-h)。$$

整理即得(1)式。

《少广正负术外篇》卷中所谓的“勾股难题”，其内容系讨论勾股形中诸线段间的关系。此部分是全书的一个重点，也是最能体现孔广森的数学思想的部分。

在本卷开头，孔氏即给出一组由勾股定理变形而来的恒等式，作为列方程解题的基础。它们是

$$(c-b)(c+b)=a^2,\ (c-a)(c+a)=b^2,$$
$$(a+b)^2=c^2+2ab,\ (b-a)^2=c^2-2ab,$$
$$[c+(b-a)][c-(b-a)]=2ab。$$

其中 a，b，c 分别代表勾股形的勾、股、弦。

以“勾股幂难题”第三题为例：

“设有勾弦相乘幂六十五尺，股弦相乘幂一百五十六尺，求弦几何?”

“解曰：弦幂内函一勾股较幂，两勾股相乘幂，故弦幂自乘之三乘方实应有勾股较幂乘弦幂者一，勾股相乘幂乘弦幂者二。今倍勾弦相乘幂乘股弦相乘幂，即如倍勾股相乘幂乘弦幂，而弦较相乘幂之自乘又即如较幂乘弦幂也。”

这段文字用现在的数学语言表述即是：

因 $c^2=(b-a)^2+2ab$[①]，

故 $c^4=c^2(b-a)^2+2c^2ab$。

---

① 上述第4个恒等式。

又　$2ac \cdot bc = 2c^2ab$，

$[c(b-a)]^2 = c^2(b-a)^2 = (bc-ac)^2$，

故　$c^4 = (bc-ac)^2 + 2ca \cdot bc$，

即　$c = \sqrt[4]{(bc-ac)^2 + 2ac \cdot bc} = 13$。

在列方程时，孔广森在很多地方还用到了相似三角形的性质，特别是在“勾股容方”类的问题中。“勾股容方”即指一个正方形内接于一个勾股形中，正方形有两边分别落在勾、股之上，一个顶点落在斜边上，如图1.2.10，内接正方形的边长称为方边，设为r，DB称为余勾，AF称为余股。讨论它们与勾、股、弦之间的互求，为“勾股容方”的主要内容。下面以第十三题为例。

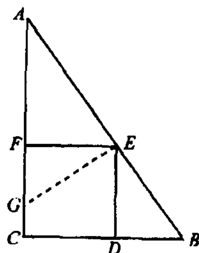


图 1.2.10

“设知方边十二尺，弦和和八十四尺，求余勾、余股各几何？”

该题之后有一注解：“方边自乘即是余勾股相乘从冪，故止取得其和、较，自知其各数。”这就是说由于r^2=余勾×余股(因为$\triangle AFE \backsim \triangle EDB$)可知，因而只要求到余股与余勾之和或差，即可求得余勾、余股。本题给出的计算“余勾+余股”的公式为

$$余勾+余股=\frac{(弦和和-倍方边)^2}{倍弦和和-倍方边}。$$

孔氏的推导过程如下：

在图1.2.10中，截取$FG=DB$，则AEG为直角三角形，且$AE+EG=AB$。

因为$\triangle ABC \backsim \triangle AGE$，所以

$$\frac{AC+CB+BA}{AB}=\frac{AE+EG+GA}{AG},$$

因而　$$\frac{(AC+CB+BA)+(AE+EG+GA)}{AB+AG}=\frac{AE+EG+GA}{AG}。$$

又　$AE+EG+GA=AB+GA=AB+AC+CB-2r$，

于是 $(AC+CB+BA)+(AE+EG+GA)$

$$=2(AB+AC+CB)-2r。$$

故 $$\frac{2(AC+CB+BA)-2r}{(AC+CB+BA)-2r}=\frac{(AC+CB+BA)-2r}{AF+DB},$$

即 $$\frac{\text{倍弦和和}-\text{倍方边}}{\text{弦和和}-\text{倍方边}}=\frac{\text{弦和和}-\text{倍方边}}{\text{余勾}+\text{余股}}。$$

所以 $$\text{余勾}+\text{余股}=\frac{(\text{弦和和}-\text{倍方边})^2}{\text{倍弦和和}-\text{倍方边}}。$$

由上面的几个例子可以看出,孔广森比较注重推理的过程,他不是就数论题，而是就理论题，使解题过程一般化。他在《少广正负术外篇》的第二个题之后就说:“右术大书之不著数，问题本数附注于下,明术以题立不以数立,任设他数皆可通用,后仿此。”即是明证。同时，在解题过程中，孔氏还比较注重代数方法。这也是孔广森《少广正负术内外篇》的独到之处。在中国古典数学发掘整理的初期阶段，孔氏此书在高次方程的应用上还是有些特点的。

二、张敦仁的数学研究工作

张敦仁(1754—1834)，字仲篙，号古愚，山西阳城人，清代中叶著名的汉学家、数学家。他在乾隆四十年(1775)考中进士后步入政坛，先后担任过江西高安、安徽庐陵的知县。嘉庆元年(1796)，改官江苏，任松江、苏州、江宁知府，继而转任江西吉安、南昌知府。道光二年(1822)，擢云南盐法道。后以老病辞官，寓居江宁。张敦仁“居官勤于公事，暇即力求古籍，研究群书，虽老病家居，亦不废学。尤嗜历算。”①他的著作丰富，主要有《盐铁论考证》一卷、《尔雅图考》二十卷、《礼记郑注考异》二卷、《缉古算经细草》三卷,《求一算术》三卷及《开方补记》八卷附《通论》一卷。其中后三种为其数学著作。张敦仁与“谈天三友”李

---

①罗士琳. 续畴人传·张敦仁传. 测海山房本

锐、焦循、汪莱及其他一些数学家都有学术联系。这对他的数学研究工作很有帮助。

张敦仁“因读《缉古算经》，凡高台、羡道、筑堤、穿河等二十术皆以从立方开之。苦其有术无草且词隐理奥，无能通之者。其第十六术以下，原本注文、术文烂脱甚多，乃与李秀才商确，各以天元入之，共著细草，并将其烂脱字据术补足。”[①]兹以《缉古算经》第3题为例，对张氏的解释可略见一斑：[②]

表 1.2.3

天元术	方程语言解释
立天元一为东头高，	设东头高为 x
西头高为 𝍫𝍠 𝍠元，	西头高为 $x+31$
东头上广为 𝍣.𝍱 𝍠元，	东头上广为 $x+4.9$
正袤为 𝍣𝍯𝍥.𝍱 𝍠元，	堤长为 $x+476.9$
西头下广为 𝍯𝍢.𝍩 𝍠元，	西头下广为 $x+73.1$
东头下广为 𝍩𝍠.𝍩 𝍠元，	东头下广为 $x+11.1$
倍东头高，加西头高，得 𝍫𝍠 𝍢元，	$2x+(x+31)=3x+31$
并东头上下广，半之得 𝍧 𝍠元，	$\frac{(x+4.9)+(x+11.1)}{2}=x+8$

① 罗士琳. 续畴人传·张敦仁传. 测海山房本

② 略去计算步骤的具体叙述.

续表 1.2.3

天元术	方程语言解释
乘之得 𝍡𝍬𝍧 𝍭𝍤元 𝍢 于上。	$(3x+31)(x+8)$ $=3x^2+55x+248$
又倍西头高，加东头高，得 𝍮𝍡 𝍢元，	$2(x+31)+x=3x+62$
并西头上下广，半之，得 𝍫𝍨 𝍠元，	$\dfrac{(x+4.9)+(x+73.1)}{2}=x+39$
乘之，得 𝍪𝍣𝍩𝍧 𝍠𝍯𝍨元 𝍢 。	$(x+39)(3x+62)$ $=3x^2+179x+2418$
加入上位，得 𝍪𝍥𝍮𝍥 𝍡𝍫𝍣元 𝍥 ，	$(3x^2+55x+248)+(3x^2+179x$ $+2418)=6x^2+234x+2666$
以正袤乘之，得 𝍠𝍪𝍦𝍩𝍣𝍩𝍤.𝍬 𝍩𝍠𝍬𝍡𝍮〇.𝍮元 𝍫〇𝍱𝍤.𝍬 𝍥 。	$(6x^2+234x+2666)(x+476.9)$ $=6x^3+3095.4x^2+114260.6x$ $+1271415.4$， 此为堆积的 6 倍
𝍡𝍯𝍤𝍱𝍡𝍬.𝍧为堆积， 又以分母六乘之，得 𝍩𝍥𝍭𝍤𝍭𝍣𝍰.𝍧为同数，	从题设条件求得四县劳动力能作总土方数为 275924.8，其六倍是 1655548.8，与六倍堆积相等，就得到三次方程

续表 1.2.3

天元术	方程语言解释
与左相消，得 𝍫𝍧𝍬𝍠𝍫𝍢. 𝍬太 𝍩𝍠𝍬𝍡𝍮〇. 𝍮元 𝍫〇𝍱𝍤. 𝍬 𝍥 。	$6x^3+3095.4x^2+114260.6x-384133.4=0$
开立方，得三尺一寸，即东头高也。	解之，得 $x=3.1$，为东头高

张敦仁用天元术注解《缉古算经》，虽非原著本意，但清楚地证实了王氏著作的科学性。另一方面，张氏的工作对于湮没已久的天元术重现，也做出了有意义的贡献。

清代学者从《永乐大典》中抄录出《数书九章》原文后，群相研究，而以对"大衍求一术"用力尤勤。1803 年张敦仁序成的《求一算术》对秦九韶的有关方法解释得很出色。该书序言中说："算数之学，自《九章》而后，述作滋多，其最善者则有二术：一曰'立天元一'，一曰'求一'。……穷奇偶之情，莫善于'求一'。'求一'之术出于《孙子算经》'物不知数'之问。……其法以各数及不满各数之残，求未以各数除去之数，必先求以各数去之余一之数，而后诸数可求，故曰'求一'也。……独'求一术'仅见于宋秦九韶道古《数学九章》中……官曹多暇，辄依秦氏所说略加修饰，推而衍之，得书一卷，名曰《求一算术》。以篇帙稍繁，分为上、中、下。上以究其原，中、下以明其法，中为杂法，下则演纪也。"

张敦仁给出求乘率(解同余式 $ax\equiv 1 \pmod b$，其中 $a<b$)的术文是

"列少数(a)于上，多数(b)于下，以上除下，所得为第一数

(q_1)，有余(r_1)。复以下(r_1)除上(a)，所得为第二数(q_2)，如是上下相除，所得以次命之（如第三数(q_3)、第四数(q_4)之类）。上位余一即止，不除。”

算法见表 1.2.4。

表 1.2.4

q_2	q_4		q_n	
$a=r_1q_2+$	$r_2=r_3q_4+$	$r_4=\cdots=\cdots$	$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+$	$r_n=1$
$b=aq_1+$	$r_1=r_2q_3+$	$r_3=\cdots=\cdots$	$r_{n-3}=r_{n-2}q_{n-1}+$	r_{n-1}
q_1	q_3		q_{n-1}	

“乃列各得数于左行，立天元一为右行第一数，以左行第一数乘之，得右行第二数，复置右行第二数，以左行第二数乘之，加入右行第一数，得右行第三数。每置右行数以左行相当之数乘之，以右行上位加之，得右行次位，其右行最后得数，即乘率也。”

算法见表 1.2.5。

表 1.2.5

左行	右　　行
q_1	1(天元 1)
q_2	q_1
q_3	q_1q_2+1
q_4	$q_3(q_1q_2+1)+q_1$
…	$q_4[q_3(q_1q_2+1)+q_1]+(q_1q_2+1)$
	…

以《数书九章》中的“推计土功”题为例说明张氏的方法。该题即是求解同余式 $3800x\equiv1(\mathrm{mod}\ 27)$。张氏将其化为 $20x\equiv1(\mathrm{mod}\ 27)$，则 20 即为少数，27 即为多数。依张氏方法，求得第一数 1，第二数 2，第三数 1，第四数 5。如表 1.2.6 所示。再依张

氏方法可求得乘率。如表 1.2.7 所示。由左行的四个数，可求出右行至第五个数，此即为乘率。

表 1.2.6

$q_2=2$	$q_4=5$	
$20=7\times2+$	$6=1\times5+$	$1=r_4$
$27=20\times1+$	$7=6\times1+$	1
$q_1=1$	$q_3=1$	

表 1.2.7

左　行	右　　行
$q_1=1$	1(天元 1)
$q_2=2$	1
$q_3=1$	$1\times2+1=3$
$q_4=5$	$1\times3+1=4$
	$4\times5+3=23$

从理论上讲，张敦仁的方法和秦九韶的方法是一致的，张法是对秦法的清晰的解释。

三、骆腾凤和《艺游录》

骆腾凤(1771—1842)①，字鸣冈，号春池，江苏山阳(今淮安)人。嘉庆六年(1801)举人，道光七年(1827)授舒城县训导，不及一年，便告养归里。骆氏为人聪敏，好读书，尤精于天文历算，曾师从李潢学习算学。著《开方释例》四卷，讨论开方式之诸方廉和较、大小加减之理，阐明正负开方术，但没有理解汪莱、李锐对于方程的次数与根的个数的关系的工作。骆腾凤还作关于

① 诸可宝《畴人传三编》卷三本传："(道光)二十二年八月卒于家，年七十有二。"《清史稿》卷五〇七本传亦同。

《九章算术》、《孙子算经》、《缉古算经》、《数书九章》、《测圆海镜》等书的研究札记二十二篇，这就是他的《艺游录》。他在该书的序言中表明了写作意图："至于衰分、方程、勾股等法，以及《九章》所未载与夫古今算书之未能该洽者，辄为溯其源、正其误，不敢掠前哲之美以为名，亦不为黯黮之词以欺世也。"骆氏《艺游录》中的某些札记对前人的批评不当，甚至是错误，但是有些内容还是有其贡献的。如对《缉古算经》仰观台题的研究校勘，就很有创见；他关于正负数的诠释，得刘徽注之真谛；从他的《割圆密率图解》篇，可探知李潢的真实思想。骆腾凤的工作的突出之处反映在《衰分补遗》篇，他以方程术和大衍求一术求解《张丘建算经》中的百鸡问题。

骆氏的方法如下：

表 1.2.8

天元术	方程语言解释
"鸡雏为三分钱之一，三为分母，通五钱为十五，通三钱为九，通三分之一为一，通钱一百为三百。"	$\begin{cases}5x+3y+\frac{1}{3}z=100\\x+y+z=100\end{cases}$ $\begin{cases}15x+9y+z=300\\x+y+z=100\end{cases}$
"先以雏作百只算之，乘价一得百钱，以减三百，余二百为鸡翁母价多于雏之共较。以雏价一，减翁价十五、母价九，得翁较十四、母较八。"	消去 z，得 $14x+8y=200$ 翁较 14，母较 8，共较实 200

续表 1.2.8

天元术	方程语言解释
“以等二约之，得翁七母四为定母，约价较二百得一百为定实。以翁七除定实百得十四奇二。”	约分得 $7x+4y=100$ 翁较 7，母较 4，定实 100 $4y\equiv 2 \pmod 7$ $\equiv 0 \pmod 4$
“定母七、四相乘得二十八为衍母。 乃置定七，以四为衍数除，不满法，求得乘率二。”	$a_1=7$，$a_2=4$（定母） $M=a_1\times a_2=28$（衍母） $G_1=\dfrac{M}{a_1}=4$（衍数） $k_1G_1=4k_1\equiv 1 \pmod 7$ $k_1=2$（乘率）
“以乘衍数四得八为翁七之用数，以奇二乘八得十六，不满衍母，即为鸡母实，以母定四除之得四，为鸡母数。”	$k_1\times G_1=2\times 4=8$ $R_1\times k_1\times G_1=2\times 8=16$ $N=4y=\sum_{i=1}^{2}R_ik_iG_i$ $=16+0=16$ $y=\dfrac{16}{4}=4$
“以鸡母实十六减定实余八十四，以翁定七除之得十二，为鸡翁数。” “并翁母数以减共鸡一百，余八十四即鸡雏数。”	$7x=100-4y=84$ $x=12$ $z=100-(x+y)$ $=100-16=84$

骆氏又说：“置鸡翁十二，以定四除之得三，故知有三数，翁每减母较四，母每加翁较七，雏每减翁母二较之较三即得：鸡翁十二价六十，鸡母四价十二，雏八十四价二十八；鸡翁八价四十，

鸡母十一价三十三，雏八十一价二十七；鸡翁四价二十，鸡母十八价五十四，雏七十八价二十六。”这一解释也是正确的。

《张丘建算经》所载的百鸡问题答案正确，但术文简括，不详算理。此后千余年间，甄鸾、谢察微、杨辉、程大位、焦循、时曰醇、黄宗宪等人都作出可贵的努力。骆氏的工作沟通了百鸡术与大衍求一术的联系。

第二编

幂级数展开式的研究

第一章　董祐诚、项名达、戴煦的研究工作

第一节　董祐诚及其《割圆连比例术图解》

董祐诚，字方立，江苏阳湖(今常州市)人。乾隆五十六年五月二十日(1791,6,21)生，道光三年七月二十八日(1823,9,2)卒。[①]嘉庆二十三年(1818)举人。少年时期正值家道中落，常为衣食奔走。所到之处，山川形势，采览所及，历历志之不忘。嘉庆二十二年(1817)，其兄董基诚中进士。董祐诚遂依兄客居北京。董祐诚一生仅三十三岁，而著述丰富。文学、数学、历法以及地理等方面皆有著作。遗稿由董基诚编为《董方立遗书》九种十六卷，道光十年(1830)初刊。其中数学著作有《割圆连比例术图解》三卷(1819)，《椭圆求周术》一卷(1821)，《斜弧三边求角补术》一卷(1821)，《堆垛求积术》一卷(1821)。上述第一种为其代表作。

有弧长求其弦、矢，有弦、矢求其弧长，是一个古老的数学问题。自法人杜德美(P. Jartox,1668－1720)将 π、$\sin x$ 、$\text{vers}\ x$

---

① 李兆洛. 董方立传. 养一斋文集续集. 卷五. 维风堂活字本

等三个幂级数展开式传入中国后，幂级数的研究遂成为中国数学一个相当活跃的研究领域。自18世纪初至19世纪末，著作代出，成果丰富。梅瑴成(1681－1763)首载杜氏三术于《赤水遗珍》。俟后，明安图(1692? －1763?)又创六术并就九术予以证明。陈际新将乃师遗作整理为《割圆密率捷法》四卷，今传道光十九年(1839)初刊本。该书刊出之前虽有少数抄本流传，而通常可见者只是梅氏所载三术。以梅氏所载三术“语焉不详，罕通其故”，董祐诚欲更创新法而“覃精累年，迄无所得”。嘉庆二十四年(1819)春，秀水朱鸿以九术抄本出示董祐诚。“九术以外，别无图说”，“乃反复寻绎，究其立法之原”，成书三卷。该书运用《数理精蕴》所载“连比例四率法”与中国传统数的垛积术给出弧与弦、弧与矢互求的四术。由此四术可以导出九术，是为立术之原。

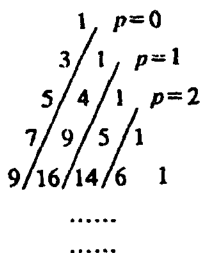


图 2.1.1

垛积术是董氏割圆术的基础。《堆垛求积术》给出方锥堆与纵方堆的求和公式。图2.1.1称为方锥堆。当$p=0$，1，2…时分别称为平方锥堆，立方锥堆，三乘方锥堆……董氏给出第p行前n个数的和为

$$\sum^{n}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)\cdots(r+p-1)(2r+p-1)$$
$$=\frac{1}{(p+2)!}n(n+1)\cdots(n+p)(2n+p)。\qquad(1)$$

图 2.1.2 称为纵方堆（首数为 3）。当 $p=0, 1, 2, \cdots$ 时分别称为平方纵堆，立方纵堆，三乘方纵堆……董氏给出第 p 行前 n 个数的和为

$$\sum^{n}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)\cdots(r+p-1)(2r+3p+1)$$

$$=\frac{1}{(p+2)!}n(n+1)\cdots(n+p)(2n+3p+4)。\qquad(2)$$

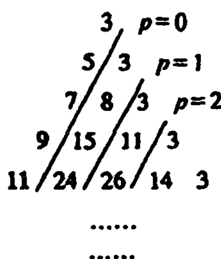


图 2.1.2

依《割圆连比例图解》的解释，平方堆的构成方法如下。由三角垛第 p 行第 r 项加第$(p+1)$行第$(r-1)$项的二倍，得方锥堆第 p 行第 r 项。因三角垛第 p 行第 r 项等于第$(p+1)$行第 r 项减去第$(p+1)$行第$(r-1)$项，故方锥堆第 p 行第 r 项即三角垛第$(p+1)$行第 r 项加第$(r-1)$项。由此可得方锥堆通项为

$$\frac{1}{p!}r(r+1)\cdots(r+p-1)+2\frac{1}{(p+1)!}(r-1)r\cdots(r+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)\cdots(r+p)+\frac{1}{(p+1)!}(r-1)r\cdots(r+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)\cdots(r+p-1)(2r+p-1)。$$

由三角垛求和公可得其求和公式

$$\sum^{n} \frac{1}{(p+1)!} r(r+1)\cdots(r+p-1)(2r+p-1)$$

$$= \sum^{n} \frac{1}{(p+1)!} r(r+1)\cdots(r+p) +$$

$$\sum^{n-1} \frac{1}{(p+1)!} r(r+1)\cdots(r+p)$$

$$= \frac{1}{(p+2)!} n(n+1)\cdots(n+p)(2n+p)。$$

此即上述式 (1)。

纵方堆的构成方法如下。三角垛第 p 行第 r 项加第$(p+1)$行第 r 项的二倍。类似地可得式 (2)。董氏“纵方堆求积术”注云：“凡纵方堆首位无定数，兹以首位三数为例”。故其一般情形如图 2.1.3 所示

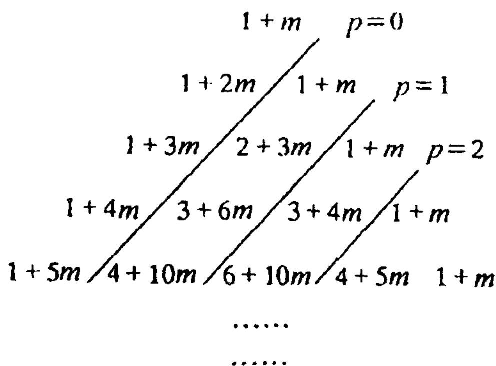


图 2.1.3

其求和公式为

$$\sum^{n} \frac{1}{(p+1)!} r(r+1)\cdots(r+p-1)\ [mr+(m+1)p+1]$$

$$= \frac{1}{(p+2)!} n(n+1)\cdots(n+p)\ [mn+(m+1)p+(m+2)]。 \quad (3)$$

其中 m 为正整数。

上述式（1）用于弧求弦，弧求矢两术。

弧与弦及弧与矢互求的四术，董氏分别称之为“有通弦求通弧加倍几分之通弦”，“有矢求通弧加倍几分之矢”，“有通弦求几分通弧之一通弦”，“有矢求几分通弦之一矢”，亦即下列四式。

$$l_{2n-1}=(2n-1)l-\frac{(2n-1)\ [(2n-1)^2-1^2]}{3!\ 4r^2}l^3+\frac{(2n-1)\ [(2n-1)^2-1^2]\ [(2n-1)^2-3^2]}{5!\ 4^2r^4}l^5-\frac{(2n-1)\ [(2n-1)^2-1^2]\ [(2n-1)^2-3^2]\ [(2n-1)-5^2]}{7!\ 4^3r^6}l^7+\cdots \tag{4}$$

$$b_{2n}=\frac{n^2}{2!}(2b)-\frac{n^2(n^2-1^2)}{4!\ r}(2b)^2+\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{6!\ r^2}(2b)^3-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{8!\ r^3}(2b)^4+\cdots \tag{5}$$

其中 l 为通弦，l_{2n-1}为倍弦，b 为矢，b_{2r}为倍矢，r 为半径。

$$l=\left(\frac{l_{2n-1}}{2n-1}\right)+\frac{[(2n-1)^2-1]}{3!\ 4r^2}\left(\frac{l_{2n-1}}{2n-1}\right)^3+\frac{[(2n-1)^2-1][9(2n-1)^2-1]}{5!\ 4^2r^4}\left(\frac{l_{2n-1}}{2n-1}\right)^5+\frac{[(2n-1)^2-1][9(2n-1)^2-1][25(2n-1)^2-1]}{7!\ 4^3r^6}\left(\frac{l_{2n-1}}{2n-1}\right)^7+\cdots \tag{6}$$

$$b=\frac{1}{2!}\left(\frac{2b_{2n}}{n^2}\right)+\frac{(n^2-1)}{4!\ r}\left(\frac{2b_{2n}}{n^2}\right)^2+\frac{(n^2-1)(4n^2-1)}{6!\ r^2}\left(\frac{2b_{2n}}{n^2}\right)^3+\frac{(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}{8!\ r^3}\left(\frac{2b_{2n}}{n^2}\right)^4+\cdots \tag{7}$$

其中 l_{2n-1}为通弦，l 为分弦，b_{2n}为矢，b 为分矢。

兹以式(4)、式(5)为例说明其推导方法。如图 2.1.4，O 为圆心，OA，OB，OC，…为半径 r，$AB=BC=CD=\cdots$，作 $BI//OC$，

$CL /\!/ OD$，$DP /\!/ OE$，…

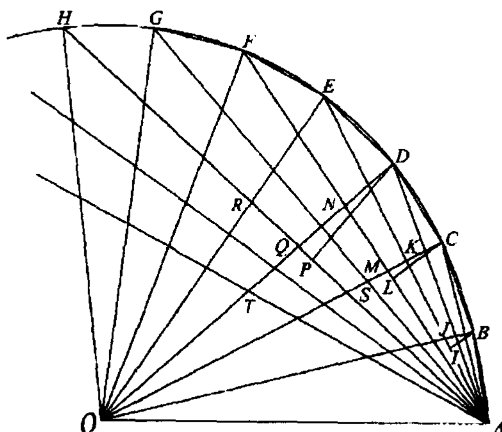


图 2.1.4 弦矢递加成连比例图

令连比例第 n 率为 r_n（$n=1, 2, 3, \cdots$），$r_1=r$。

$\triangle OAB \backsim \triangle ABJ$，

一分之弦 $AB=l=r_2$，

二分倍矢 $BJ=2b=r_3$。

$\triangle OAB \backsim \triangle BJI$，由连比例四率法 $JI=r_4$，

三分之弦 $AD=KJ+2JA=(r_2-r_4)+2r_2$。

$\triangle OAB \backsim \triangle AKM$，

$KA=2r_2-r_4$，

$KM=2r_3-r_5$，

四分倍矢 $CS=KM+2CK=(2r_3-r_5)+2r_3$。

$\triangle OAB \backsim \triangle CML$，

$ML=3r_4-r_6$，

五分之弦 $AF=NM+2MA$

$$=(r_2-3r_4+r_6)+2(2r_2-r_4)。$$

$\triangle OAB \backsim \triangle ANQ$，

$NA=3r_2-4r_4+r_6$，

$NQ=3r_3-4r_5+r_7$，

六分倍矢 $DT=NQ+2DN$

$$=(3r_3-4r_5+r_7)+2(3r_3-r_5)。$$

$\triangle OAB \backsim \triangle DQP$，

$QP=6r_4-5r_6+r_8$，

七分之弦 $AN=RQ+2QA$

$$=(r_2-6r_4+5r_6-r_8)+2(3r_2-4r_4+r_6)$$

……

董氏计算到十六分倍矢，十七分之弦，发现倍弧通弦表达式及倍弧倍矢表达式的诸率及其系数呈规律性变化，各率的系数与贾宪三角形斜行数字即三角垛对应，如图 2.1.5、图 2.1.6 所示。三角垛表列为图 2.1.7 以资对照。

一分之弦　$1\cdot r_2$　$p=0$

三分之弦　$(1\cdot r_2\ -1\cdot r_4)$　$p=2$　$+2(1\cdot r_2)$　$p=1$

五分之弦　$(1\cdot r_2\ -3\cdot r_4\ +1\cdot r_6)$　$p=4$　$+2(2\cdot r_2\ -1\cdot r_4)$　$p=3$

七分之弦　$(1\cdot r_2\ -6\cdot r_4\ +5\cdot r_6\ -1\cdot r_8)$　$+2(3\cdot r_2\ -4\cdot r_4\ +1\cdot r_6)$　$p=5$

……　……

……　……

图 2.1.5　倍弧通弦表达式

由此可见通弦、倍矢表达式与三角垛的关系。“弦中一分”各系数：二率为三角垛 $p=0$ 各值，四率为 $p=2$ 各值相反数……“弦左右一端”各系数：二率为三角垛 $p=1$ 各值，四率为 $p=3$ 各

二分倍矢　　$1\cdot r$ / 　$p=1$　　　　　$p=2$

四分倍矢　　$(2\cdot r$ / $-1\cdot r)$ / 　$p=3$　　$+2(1\cdot r)$ / 　$p=4$

六分倍矢　　$(3\cdot r$ / $-4\cdot r$ / $+1\cdot r)$ / 　$p=5$　　$+2(3\cdot r$ / $-1\cdot r)$ / 　$p=6$

八分倍矢　　$(4\cdot r$ / $-10\cdot r$ / $+6\cdot r$ / $-1\cdot r)$　　$+2(6\cdot r$ / $-5\cdot r$ / $+1\cdot r)$ /

……　　　　……

……　　　　……

图 2.1.6　倍弧倍矢表达式

1 / 　$p=0$

1 / 1 / 　$p=1$

1 / 2 / 1　$p=2$

1 / 3 / 3 / 1　$p=3$

1 / 4 / 6 / 4 / 1　$p=4$

1 / 5 / 10 / 10 / 5 / 1　$p=5$

1 / 6 / 15 / 20 / 15 / 6 / 1　$p=6$

1 / 7 / 21 / 35 / 35 / 21 / 7 / 1

……

……

图 2.1.7　三角垛表

值相反数……“倍矢中一分”系数：三率为 $p=1$ 各值，五率为 $p=3$ 各值相反数……“矢上下一端”系数：三率为 $p=2$ 各值，五率为 $p=3$ 各值相反数……依此规律可得 $(2n-1)$ 分之弦表达式各项。“弦中一分”：二率为 $p=0$ 第 n 项，四率为 $p=2$ 第 $(n-1)$ 项相反数……“弦左右一端”：二率为 $p=1$ 第 $(n-1)$ 项，四率为 $p=3$ 第 $(n-2)$ 项相反数……同理可得 $2n$ 分倍矢表达式各项。“倍矢中一分”：三率 $p=1$ 第 n 项，五率 $p=2$ 第 $(n-1)$ 项，相反数……“矢上下一端”：三率 $p=2$ 第 $(n-1)$ 项，五率 $p=4$ 第 $(n-2)$ 项相反数……或即

$$l_{2n-1}=[1r_2-\frac{1}{2!}(n-1)nr_4+\frac{1}{4!}(n-2)(n-1)n(n+1)r_6-\cdots]+$$

$$2\ [(n-1)r_2-\frac{1}{3!}(n-2)(n-1)nr_4+\cdots],$$

$$2b_{2n}=[nr_3-\frac{1}{3!}(n-1)n(n+1)r_5+$$

$$\frac{1}{5!}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)r_7-\cdots]+$$

$$2\left[\frac{1}{2!}(n-1)nr_3-\frac{1}{4!}(n-2)(n-1)n(n+1)r_5+\cdots\right]。$$

由 $r_1=r$，$r_2=l$，$r_3=2b$，依次求得 $r_n(n=1,2,3,\cdots)$，运用方锥垛求和公式(1)及三角垛求和公式，整理即得(4)，(5)。既得(4)，(5)，由级数回求法可得(6)，(7)。

由以上四术可得明安图九个展开式。其间对应关系如表2.1.1。

表 2.1.1

立法之原	九术名称
有通弦求通弧 加倍几分之通弦	通弧求通弦
	弧背求正弦
有矢求通弧 加倍几分之矢	通弧求矢
	弧背求正矢
有通弦求几分 通弧之一通弦	通弦求通弧
	正弦求弧背
	圆径求周
有矢求几分 通弦之一矢	矢求通弧
	正矢求弧背

由式(4)，当 $n\to\infty$ 时，$(2n-1)l\to a$，得

$$l_{2n-1}=a-\frac{a^3}{3!\;4r^2}+\frac{a^5}{5!\;4^2r^4}-\frac{a^7}{7!\;4^3r^6}+\cdots$$

此即通弧(a)求通弦(l_{2n-1})式。

由式(5)，注意到 $2b=\frac{l^2}{r}$，当 $n\to\infty$时，$2nl\to a$，得

$$b_{2n}=\frac{a^2}{2!\;4r}-\frac{a^4}{4!\;4^2r^3}+\frac{a^6}{6!\;4^3r^5}-\frac{a^8}{8!\;4^2r^7}+\cdots$$

此即通弧(a)求矢(b_{2n})式。

由式(6)，与通弧求通弦相同条件下，得

$$a=l_{2n-1}+\frac{1^2}{3!\;4r^2}l_{2n-1}^3+\frac{1^2\cdot 3^2}{5!\;4^2r^4}l_{2n-1}^5+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{7!\;4^3r^6}l_{2n-1}^7+\cdots$$

此即通弦求通弧式。

由式(7)，与通弧求矢相同条件下，得

$$a^2=2r\left[\frac{1}{2!}(8b_{2n})+\frac{1^2}{4!\;4r}(8b_{2n})^2+\frac{1^2\cdot 2^2}{6!\;4^2r^2}(8b_{2n})^3+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{8!\;4^3r^3}(8b_{2n})^4+\cdots\right],$$

此即矢求通弧式。

由此四式易得其余五式。

董氏《割圜连比例术图解》的创新之处在于割圆术与垛积术之间联系的建立，从而给出“立法之原”四术。垛积术的应用不仅为三角函数幂级数的研究提供了有利的工具，同时也将垛积术的研究推进一步。董氏的工作在明安图之后而在项名达与徐有壬之前，有继往开来之功。项名达《象数一原》(1834)将此四术精确化并概括为二术。徐有壬由此四术导出大小弦互求，大小矢互求四术，进而给出大小八线互求十八术，共二十二术，使得三角函数幂级数展开式大体完备。

第二节　项名达及其《象数一原》

项名达，字步莱，号梅侣，浙江仁和（今杭州市）人。乾隆五十四年（1789）生，道光三十年（1850）卒。嘉庆二十一年（1816）举人，考授国子监学正。道光六年（1826）进士，改官知县，不就职。道光二十六年（1846）冬，辞去紫阳书院讲席，专书著述。著有《下学庵算学》三种，包括《勾股六术》一卷（1825）、《三角和较术》一卷（1843）、《开诸乘方捷术》一卷（约1845）。有未完稿《象数一原》六卷（1849），咸丰七年（1857）由戴煦校补并补卷七椭圆求周术图解，遂成完璧，有光绪十四年上海刊本等版本。最后一种为项氏代表作。

《象数一原》在三角函数幂级数展开式和椭圆求周方面均有深入的研究。在董祐诚工作的基础上，项氏继续研究九术的立法之原。道光二十三年（1843）项氏自序称："自董氏术出而方圆率相通之理始显。术凡四，曰求倍分弦矢、析分弦矢。……所疑者，堆积既与率数合，何以有倍分无析分？倍分中，弦率又何以有奇分无偶分？且弦矢线联于圆中于三角堆何与？"蓄疑有年，至道光十七年（1837）得到结论："任设几分弧之几，无不可求。"项氏推广董氏的方法并将其四术概括为"知本度通弦求他度通弦"、"知本度矢求他度矢"二术。亦即

$$l_n=n\left(\frac{l_m}{m}\right)+\frac{n(m^2-n^2)}{3!\ 4r^2}\left(\frac{l_m}{m}\right)^3+\frac{n(m^2-n^2)(3^2m^2-n^2)}{5!\ 4^2r^4}\left(\frac{l_m}{m}\right)^5+\cdots$$

$$b_n=\frac{n^2}{2!}\left(\frac{2b_m}{m^2}\right)+\frac{n^2(m^2-n^2)}{4!\ r}\left(\frac{2b_m}{m^2}\right)^2+\frac{n^2(m^2-n^2)(2^2m^2-n^2)}{6!\ r^2}\left(\frac{2b_m}{m^2}\right)^3+\cdots$$

其中 m，n 分别是所知度、所求度。当 $m=1$ 时，得董氏前二术。当 $n=1$ 时，得董氏后二术。

此外，项氏还讨论了弦矢求八线各术。主要结果有

$$\mathrm{rsec}\ \alpha=r+\frac{1\cdot(r\sin\alpha)^2}{2r}+\frac{1\cdot 3(r\sin\alpha)^4}{2\cdot 4r^3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5(r\sin\alpha)^6}{2\cdot 4\cdot 6r^5}+\cdots$$

$$\mathrm{rvers}\ \alpha=\frac{(r\sin\alpha)^2}{2r}+\frac{1\cdot(r\sin\alpha)^4}{2\cdot 4r^3}+\frac{1\cdot 3(r\sin\alpha)^6}{2\cdot 4\cdot 6r^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5(r\sin\alpha)^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8r^7}+\cdots$$

董祐诚曾论椭圆求周术，而立术有误。项名达《象数一原》卷六另予讨论，所得结果正确。戴煦所补卷七为之图解，又增一术。项氏、戴氏分别以椭圆的大辅圆和小辅圆立算，基本思想相同而所用开术方有别。

设椭圆长半轴为 a，短半轴为 b，周长为 p，则项氏所给椭圆周长可表为

$$p=2\pi a\left(1-\frac{1^2}{2^2}e^2-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\cdots\right)。$$

其中 $e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$。依戴氏的图解，该式主要推导步骤可简述如下。

如图 2.1.8，$\overset{\frown}{Q_iQ_{i+1}}$是象限大辅圆的 n 等分之一，$Q_iP_i /\!/ Q_{i+1}P_{i+1} /\!/ OA$，$Q_iN_{i+1}\perp Q_{i+1}P_{i+1}$，$P_iM_{i+1}\perp Q_{i+1}P_{i+1}$，$Q_iQ_{i+1}$为通弦，$P_iP_{i+1}$为椭弦。如图 2.1.8 可得

$$\begin{aligned}P_iP_{i+1}^2&=P_iM_{i+1}^2+P_{i+1}M_{i+1}^2\\&=(Q_iQ_{i+1}^2-Q_{i+1}N_{i+1}^2)+P_{i+1}M_{i+1}^2\\&=Q_iQ_{i+1}^2\left(1-\frac{Q_{i+1}N_{i+1}^2-P_{i+1}M_{i+1}^2}{Q_iQ_{i+1}^2}\right)\\&=l^2\left(1-\frac{S}{l}\right)。\end{aligned}$$

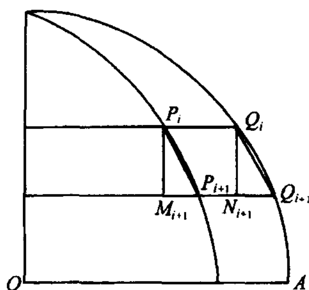


图 2.1.8

其中 $l=Q_iQ_{i+1}$，$S=\dfrac{Q_{i+1}N_{i+1}^2-P_{i+1}M_{i+1}^2}{Q_iQ_{i+1}}$。或即

$$P_iP_{i+1}=l\sqrt{1-\frac{S}{l}}。$$

由《象数一原》卷六开诸乘方捷术第一术即

$$A^{\frac{1}{n}}=(a^n-r)^{\frac{1}{n}}=a\left[1-\frac{r}{na^n}-\frac{(n-1)r^2}{2n^2a^{2n}}-\frac{(n-1)(2n-1)r^3}{2\cdot 3n^3a^{3n}}-\cdots\right]$$

展开上式，得

$$P_iP_{i+1}=l-\frac{1}{2}S-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{S^2}{l}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{S^3}{l^2}-\cdots$$

运用等分圆周及相似勾股形等知识可得

$$S=\frac{1}{2}le^2\text{vers}\frac{2n-2i-1}{2n}\pi。$$

又归纳得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\text{vers}\frac{2i+1}{2}\pi\right)^k=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}n。$$

由以上三式可得

$$\sum_{i=0}^{n-1}P_iP_{i+1}=nl\left(1-\frac{1^2}{2^2}e^2-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\cdots\right)。$$

在极限情形下

$$\frac{p}{4}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}P_iP_{i+1}。$$

由此可得项氏椭圆周长公式。

π的幂级数展开式可以解决圆径求周问题。随着椭圆周长公式的建立，圆周求径问题亦得以解决。《象数一原》卷六给出圆周求径术

$$\frac{1}{\pi}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\cdots\right)。$$

在椭圆周长公式中，令 $e=1$，则 $p=4a$，即得此式。项氏指出此式“降位颇难，求至百余数，八位尚未消尽，固不足为术也。唯确知其得数的是圆径。”降位颇难意谓收敛较慢。

戴氏校补后指出，项氏椭圆求周公式系以大辅圆立算而“借大积”开平方，故亦可以小辅圆立算而“借小积”开平方。借小积开平方即卷六开诸乘方捷术第二术

$$A^{\frac{1}{n}}=(a^n+r)^{\frac{1}{n}}=a\left[1+\frac{r}{nA}+\frac{(n+1)r^2}{2n^2A^2}+\frac{(n+1)(2n+1)r^3}{2\cdot 3n^3A^3}+\cdots\right)。$$

由此戴氏给出椭圆周长另一公式

$$p=2\pi b\left(1+\frac{1^2}{2^2}e_1^2+\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e_1^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e_1^6+\cdots\right),$$

其中 $e_1^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}$。

项氏与戴氏所给椭圆周长公式正确，其思想亦与椭圆积分原理相符。以其方法初等故运算量大。

第三节　戴煦及其《求表捷术》

戴煦，字鄂士，号鹤墅，又号仲乙。浙江钱塘（今杭州市）人。嘉庆十年五月十四日（1805，6，11）生，咸丰十年三月一日（1860，

3，22)卒。年十五，入杭州府学，后绝意进取。青年时期，曾与同里谢家禾共同研治数学，与项名达有忘年之交，与徐有壬、李善兰等人有学术交往。道光十七年(1837)校刊谢家禾《谢谷堂算学三种》。咸丰七年(1857)应项名达遗嘱为之校补《象数一原》并补卷七。戴煦读书兴趣广泛，文学、古文字、绘画以及音律无所不臻，而以数学为其主要研究领域。今传著作有《四元玉鉴细草》三卷首一卷，道光二十四年五月五日(1844，6，20)序成，有道光二十五年王吉孚抄校本，《音分古义》二卷附一卷(1854)，有光绪十二年刊本，《求表捷术》四种九卷，包括《对数简法》二卷(1845)，《续对数简法》一卷(1846)，《外切密率》四卷(1852)，《假数测圆》二卷(1852)，有《粤雅堂丛书》本等版本。其中，《求表捷术》四种九卷为其代表作。

《对数简法》与《续对数简法》论对数表造法，《外切密率》论三角函数表造法，《假数测圆》论三角函数对数表的造法。其中给出指数为任意实数的二项式展开式，对数展开式及三角函数对数展开式。

戴氏之前，造对数表的主要方法是《数理精蕴》下编卷三十八介绍的递次开方法。该法由下式计算对数

$$\lg a = 2^n M\left(a^{\frac{1}{2^n}} - 1\right),$$

其中 M 称为对数根，今称为模数。令 $a=10$，$n=54$，即将 10 开平方 54 次，得 $M=0.4342944819$。事实上，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{2^n}}-1}{\lg a^{\frac{1}{2^n}}}=\frac{1}{M}=\frac{1}{\lg e}。\tag{1}$$

递次开方求对数计算量浩大，“布算极繁，甚至经旬累月不能竟求一数”，戴氏致力于寻求简捷开方法。经与项名达共同努力，戴氏给出

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots \tag{2}$$

其中$|x|<1$，α为任意实数。

在《对数简法》中，戴氏给出二项式平方根展开式

$$A^{\frac{1}{2}}=(a^2-r)^{\frac{1}{2}}=a-\left(\frac{r}{2a}+\frac{1\cdot r^2}{2\cdot 4a^3}+\frac{1\cdot 3r^3}{2\cdot 4\cdot 6a^5}+\cdots\right)。 \tag{3}$$

在此基础上，戴氏进一步寻求开高次方的方法。在《续对数简法》中，戴氏吸收了项名达的一术

$$A^{\frac{1}{n}}=(a^n+r)^{\frac{1}{n}}=a\left[1+\frac{r}{nA}+\frac{(n+1)r^2}{2n^2A^2}+\frac{(n+1)(2n+1)r^3}{2\cdot 3n^3A^3}+\cdots\right], \tag{4}$$

又独立得到

$$A^{\frac{1}{n}}=(a^n+r)^{\frac{1}{n}}=a\left[1+\frac{r}{na^n}-\frac{(n-1)r^2}{2n^2a^{2n}}+\frac{(n-1)(2n-1)r^3}{2\cdot 3n^3a^{3n}}-\cdots\right], \tag{5}$$

$$A^{\frac{1}{n}}=(a^n-r)^{\frac{1}{n}}=a\left[1-\frac{r}{na^n}-\frac{(n-1)r^2}{2n^2a^{2n}}-\frac{(n-1)(2n-1)r^3}{2\cdot 3n^3a^{3n}}-\cdots\right], \tag{6}$$

$$A^{\frac{1}{n}}=(a^n-r)^{\frac{1}{n}}=a\left[1-\frac{r}{nA}+\frac{(n+1)r^2}{2n^2A^2}-\frac{(n+1)(2n+1)r^3}{2\cdot 3n^3A^3}+\cdots\right]。 \tag{7}$$

以上$A^{\frac{1}{n}}$四术称为“求折小各率”四术。事实上，四术中之第二、第三即

$$A^{\frac{1}{n}}=(a^n\pm r)^{\frac{1}{n}}=a\left(1\pm\frac{r}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

第一、第四即

$$A^{\frac{1}{n}}=(a^n\pm r)^{\frac{1}{n}}=a\left(1\mp\frac{r}{A}\right)^{-\frac{1}{n}}。$$

因而上述四术给出$(1+x)^{\pm\frac{1}{n}}$的展开式，其中$|x|<1$，n为正整数。

类似地，戴氏给出“求倍大各率”四术即$(1+x)^{\pm n}$的展开式，其中$|x|<1$，n为正整数。此外，《续对数简法》“论率”一节还讨论了“零率”。零率即$(1+x)^{\pm\frac{1}{n}}$，$(1+x)^{\pm n}$中的正整数n“下带奇零小余”的情形。“奇零小余”包括今之有理数和无理数两种情形。若为有理数则由上八术得$(1+x)^{\pm\frac{q}{p}}$的展开式，其中p，q是正整数。若为无理数则得$(1+x)^{\pm r}$的展开式，其中r是无理数。故由上八术及零率的讨论，戴氏推论出式(2)。

戴氏还给出对数展开式

$$\lg(1+x)=M\left[\left(\frac{x}{1+x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\right], \quad (8)$$

其中$|x|<1$，以及

$$\lg(1+x)=M\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\right), \quad (9)$$

其中$|x|<1$。

在《续对数简法》中，戴氏由递次开方法推论出，当n取“无量数”时，即$n\to\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{2^n}}-1}{\lg a^{\frac{1}{2^n}}}=\lim_{m\to\infty}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{\lg(1+x)^{\frac{1}{m}}}=\frac{1}{M},$$

或即

$$\lg(1+x)=M\lim_{m\to\infty}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{\frac{1}{m}}。 \quad (10)$$

由式(10)和式(4)得

$$\lg(1+x)=M\left[\left(\frac{x}{1+x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\right], \quad (11)$$

其中$0<x<1$。由式(10)和式(5)得

$$\lg(1+x)=M\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\right), \tag{12}$$

其中 $0<x<1$。在《假数测圆》中，由式(10)和式(6)得

$$\lg(1-x)=M\left(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\cdots\right), \tag{13}$$

其中 $0<x<1$。由式(10)和式(7)得

$$\lg(1-x)=M\left[-\left(\frac{x}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3+\cdots\right], \tag{14}$$

其中 $0<x<1$。将式(11)、(14)写为一式即式(8)，式(12)、(13)写为一式即式(9)。戴氏称："总而论之，开诸乘方有四术，求对数则求正算对数二术，求负算对数二术，亦有四术。而求对数之法于是乎始全。"

在《对数简法》中，戴氏还给出假设对数的概念。假设对数即今之自然对数。戴氏给出换底公式

$$\lg(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln 10}。 \tag{15}$$

戴氏称："凡诸对数皆定于十之对数，而实生于单一下五六空位零一之对数。今欲以十之对数求单一下五六空位零一之对数，势不得不屡次开方。若借一算为单一下五六空位零一对数，转求十之借数，即得其比例之率。"设 $\lg 10=1$，将 $a>0$ 开方 2^n 次，得 $a^{\frac{1}{2^n}}=1+x$，由

$$\lg a=2^nM(a^{\frac{1}{2^n}}-1),$$

得

$$\lg(1+x)=Mx,$$

其中 x 为 10^{-6} 或 10^{-7}。今设 $\log_a(1+x)=x$，即设 $M=1$，逆推 $\log_a 10$。由此得到底不相同的两种对数比例之率：

$$\frac{\lg 10}{\lg(1+x)}=\frac{\log_a 10}{\log_a(1+x)},$$

$$\lg(1+x)=\frac{\log_a(1+x)}{\log_a 10},$$

其中 $a=e$。证明从略。由此得上述换底公式。

《外切密率》讨论三角函数的展开式，主要成果为弧背与切割二线互求。即

$$\tan\alpha=\alpha+\frac{2\alpha^3}{3!}+\frac{16\alpha^5}{5!}+\frac{272\alpha^7}{7!}+\cdots$$

$$\alpha=\tan\alpha-\frac{1}{3}\tan^3\alpha+\frac{1}{5}\tan^5\alpha-\frac{1}{7}\tan^7\alpha+\cdots$$

$$\sec\alpha=1+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{5\alpha^4}{4!}+\frac{61\alpha^6}{6!}+\cdots$$

$$\alpha^2=\frac{2^2(\sec\alpha-1)}{2!}-\frac{5\cdot 2^3(\sec\alpha-1)^2}{4!}+\frac{64\cdot 2^4(\sec\alpha-1)^3}{6!}-\frac{1560\cdot 2^5(\sec\alpha-1)^4}{8!}+\cdots$$

此外，戴氏还给出三角函数的对数展开式。

$$\lg\sec\alpha=M\left(\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{2\alpha^4}{4!}+\frac{16\alpha^6}{6!}+\frac{272\alpha^8}{8!}+\cdots\right),\tag{16}$$

其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$。

$$\lg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-M\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}{2!}+\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^4}{4!}+\frac{16\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^6}{6!}+\frac{272\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^8}{8!}+\cdots\right],\tag{17}$$

其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$。

在式(12)中，令 $x=\sec\alpha-1$，并由

$$\sec\alpha-1=\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{5\alpha^4}{4!}+\frac{61\alpha^6}{6!}+\cdots$$

即得式(16)。在式(13)中，令 $x=\operatorname{vers}\alpha$，并由

$$\begin{aligned}\operatorname{vers}\alpha&=1-\cos\alpha=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\&=\frac{\alpha^2}{2!}-\frac{\alpha^4}{4!}+\frac{\alpha^6}{6!}-\cdots\end{aligned}$$

即得式(17)。由式(11)和式(14)还可得 $\lg\sec\alpha$ 及 $\lg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 展开式各一。与开方术折小四术相应，三角函数的对数展开式亦有四术。

戴氏的(2)、(8)、(9)、(15)、(16)及(17)式均为中国数学史上首创之成果，是当时中国数学研究的代表性成果之一。戴煦之前，对数表造法虽已传入，但实用价值不高已如前述，三角函数对数表亦已传入，而其精确性无法检验长期存疑。戴煦的工作从理论上彻底解决了这两个问题。

第二章　李善兰等人的研究工作

第一节　李善兰及其《则古昔斋算学》

李善兰，字壬叔，号秋纫[①]，浙江海宁人。嘉庆十五年十二月八日(1811,1,2)生，光绪八年十月二十九日(1882,12,9)卒。年十岁，读《九章算术》，从此遂好数学。年十五，读《几何原本》前六卷译本，能通其义。三十以后，所造渐深，致力于数学与历法的研究和著述。咸丰二年(1852)，到上海与伟烈亚力(A. Wylie，1815～1887)、艾约瑟(J. Edikins，1823～1905)及韦廉臣(A. Williamson，1829～1890)等从事《代微积拾级》等西方科学著作的翻译。同治七年(1868)征为北京同文馆算学教习。十余年如一日，先后生徒百余人。天算著作结为《则古昔斋算学》十三种二十四卷，另有论文《考数根法》(1872)、《九容图表》(1876)等。此外，合译的数学著作有《几何原本》后九卷(1857)、《代微积拾级》十八卷(1859)、《代数学》十三卷(1859)及《圆锥曲线说》三卷(约1860)等四种。李善兰于中西数学的造诣皆称精深，所著与所译之内容颇为广泛。本节先述《则古昔斋算学》之代表性成果，其他著译将于以后各节述及。

《则古昔斋算学》初刊于同治六年(1867)，包括《方圆阐幽》一卷(1845)、《弧矢启秘》二卷(1845)、《对数探源》二卷(1845)、

---

① 此据诸可宝《畴人传三编》卷六李善兰传所载。《苞溪李氏家乘》作李善兰，字竟芳，号秋纫，别号壬叔。见：王渝生《李善兰研究》．载《明清数学史论文集》．江苏教育出版社，1990

《垛积比类》四卷、《椭圆新术》一卷、《椭圆拾遗》三卷和《对数尖锥变法释》一卷等。兹就其主要成果予以介绍。

《方圆阐幽》给出李氏所创尖锥术的基本理论。李氏认为，西人所谓点、线、面皆有实体，唯大小形状不同。“点者，体之小而微者也。线者，体之长而细者也。面者，体之阔而薄者也。”体、面、线的形状及互变为图 2.2.1 所示。李氏指出“推之为面便可如纸

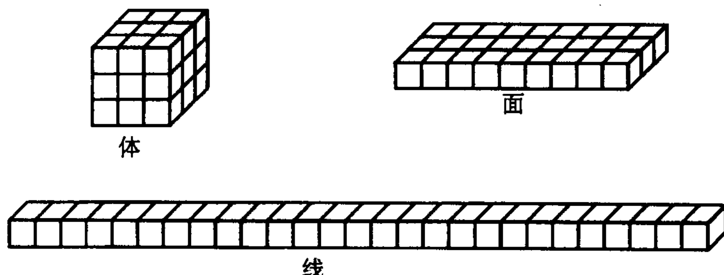


图 2.2.1

之薄，为线便可如丝之细。”此外，李氏还指出体积由平面积积迭而成，平面积由线段积迭而成。“盈尺之书由迭纸而得，盈丈之绢由积丝而成。”此例堪称微积分基本思想的一种形象的表述。

在此基础上，李氏给出空间 p 乘尖锥的概念。当 $p=1, 2, 3, \cdots$ 时，分别称为平尖锥（一乘尖锥），立尖锥（二乘尖锥），三乘尖锥……其中，二乘以上尖锥的底面和水平截面皆为正方形，三乘以上尖锥的侧面有两个是平面，另两个是曲面，“乘愈多则凹愈甚。”如图 2.2.2 所示。李氏给出 p 乘尖锥的积迭规律即层数和该层面积的关系是：

“元数起于丝发而递增之而迭之则成平尖锥。”“第一层一，第二层二，第三层三。”

“平方数起于丝发而渐增之而迭之则成立尖锥。”“第一层一，第二层四，第三层九。”

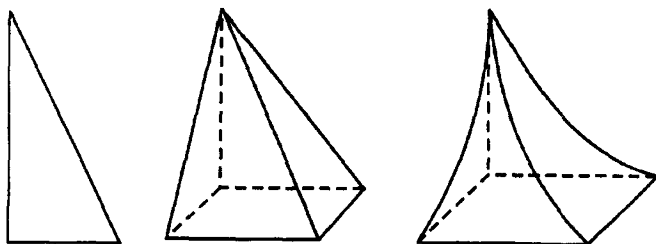


图 2.2.2

“立方数起于丝发而渐增之，变为面，而迭之，则成三乘尖锥。”“第一层一，第二层八，第三层二十七。”

“三乘方数起于丝发而渐增之，变为面，而迭之，则成四乘尖锥。”“第一层一，第二层十六，第三层八十一。”

“从此递推可至无穷，然则多一乘之尖锥皆少一乘方，渐增渐迭而成也。”

依此规律可得空间 p 乘尖锥的解析表达式。记空间 p 乘尖锥的每层面积为 1^p，2^p，3^p，…，r^p，…设空间 p 乘尖锥的底为 $a^p=b$，高为 h，第 k 层和顶点的距离为 $x=ka$，$a>0$，则第 k 层的面积 k^p 即

$$f(x)=\left(\frac{x}{a}\right)^p。$$

当 $x=h$ 时，$f(h)=\left(\frac{h}{a}\right)^p=a^p=b$，故 $a^p=\frac{h^p}{b}$。于是

$$f(x)=\frac{b}{h^p}x^p。\tag{1}$$

李氏给出空间 p 乘尖锥的体积公式

$$V=S=\frac{bh}{p+1}。\tag{2}$$

在空间 p 乘尖锥的基础上，李氏给出平面 p 乘尖锥的概念。依线面互变的观点，“二乘以上尖锥其所迭之面皆可变为线。”此

时(1)(2)保持不变。空间 p 乘尖锥及其对应的平面 p 乘尖锥，如图 2.2.3、图 2.2.4 所示。

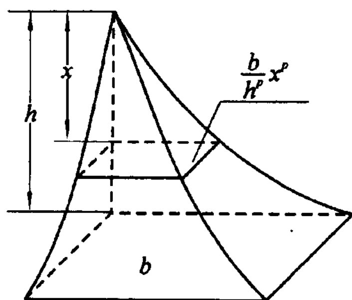


图 2.2.3

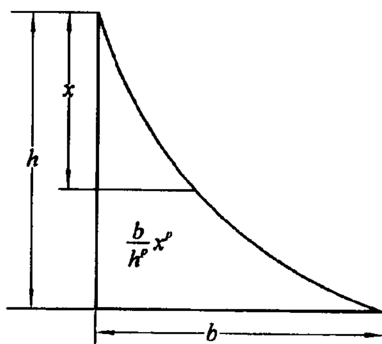


图 2.2.4

李氏又指出，等高的平面 p 乘尖锥面积可以相加而得到合积，如图 2.2.5 所示，

$$S_{合}=S_1+S_2+S_3+\cdots \tag{3}$$

根据上述尖锥术的基本理论，李氏给出 π 的展开式。单位圆

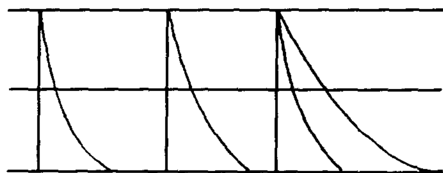


图 2.2.5

及其外切正方形，取其$\frac{1}{4}$，如图 2.2.6 所示。李氏指出，曲边三角形 ABC 的面积是无穷个 $2n$ 乘尖锥($n=1,2,3,\cdots$)的合积。诸 $2n$ 乘尖锥的高 $AC=1$，底分别是

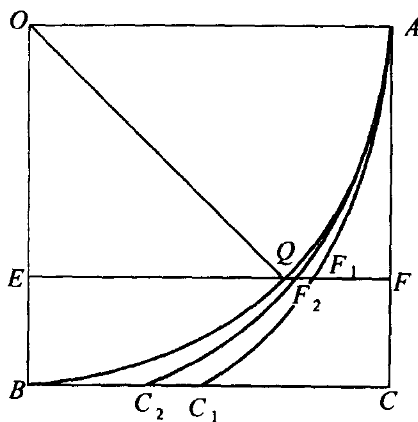


图 2.2.6

$$CC_1=\frac{1}{2},$$

$$C_1C_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4},$$

$$C_2C_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6},$$

$$C_3C_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{8},$$

……

由式(2)和式(3)，得

$$S_{ABC}=S_{ACC_1}+S_{AC_1C_2}+S_{AC_2C_3}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{9}+\cdots$$

由此可得单位圆的面积

$$\pi=4-4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{9}+\cdots\right)。$$

参照原著所载李心梅的按语，诸 $2n$ 乘尖锥的底及其乘数的计算可作如下的解释。如图 2.2.6，在 AC 上任取一点 F，作 $FE/\!/AO$，交圆弧 AB 于点 Q，令 $AF=x$，则

$$FQ=1-\sqrt{1-x^2}$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots$$

在式(1)中，令 $h=1$，则 $f(x)=bx^p$。与 FQ 的展开式逐项比较，可得诸 $2n$ 乘尖锥的底及其乘数。

事实上，在图 2.2.6 中，以点 A 为原点，AC 为横轴，AO 为纵轴，建立坐标系，可得圆弧 AB 的表达式为 $y=1-\sqrt{1-x^2}$，而曲边三角形 ABC 的面积为

$$\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x。$$

李氏所给 S_{ABC} 亦即这一定积分的结果。而式(1)和式(2)的关系亦即

$$\int_0^h\frac{b}{h^p}x^p\mathrm{d}x=\frac{bh}{p+1}。$$

式(2)为尖锥术的主要公式，而原著不载其推导过程。本节稍后将运用乘方垛的知识给出一种推测。

《对数探源》二卷与《对数尖锥变法释》一卷运用尖锥术的理论讨论对数函数的幂级数展开式问题。

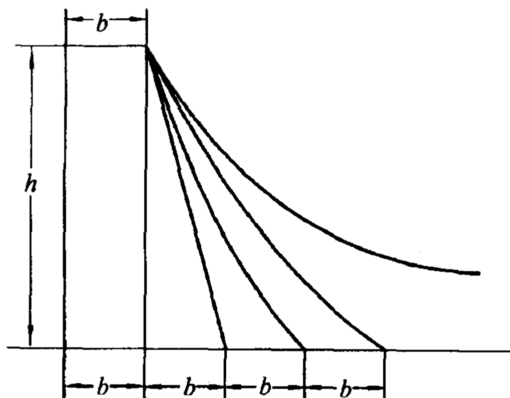


图 2.2.7

《对数探源》运用尖锥术给出

$$\ln \frac{n}{n-1}=\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}$$

并用以求对数。李氏首先给出对数积的概念“对数之积，诸乘尖锥之合积也”。如图 2.2.7 所示。图中，从左至右依次为矩形、一乘尖锥、二乘尖锥、三乘尖锥……高皆为 h，底皆为 b。李氏以高 h 表示真数，其所对“面积”表示对数。若将高 h 截为 n 段($n\geqslant 2$)，使每段高为$\frac{h}{n}$，然后作平行线截对数积，如图 2.2.8 所示，则自下而上第 k 段($2\leqslant k\leqslant n$)面积为

$$S\left(\frac{n-k+1}{n}h\right)-S\left(\frac{n-k}{n}h\right)$$

$$=S\left(\frac{k}{n}h\right)-S\left(\frac{k-1}{n}h\right)$$

$$
\begin{aligned}
&=\log_a \frac{k}{n}h-\log_a \frac{k-1}{n}h \\
&=\frac{1}{\ln a}\left(\ln \frac{k}{n}h-\ln \frac{k-1}{n}h\right) \\
&=\alpha \ln \frac{k}{k-1},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中 $a>0$，$a\neq 1$，$\alpha=\frac{1}{\ln a}$。

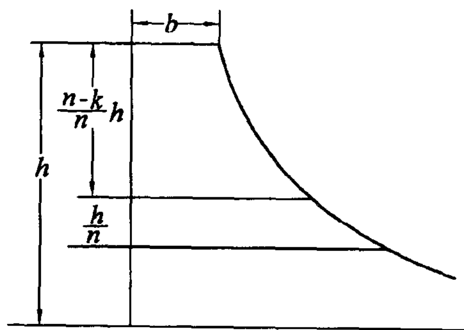


图 2.2.8

李氏指出："此尖锥合积无论截为几段，自最下第二段以上其积皆同。"该命题说明，真数成等差数列时，相邻两项对数积的差由项数 k 和 $(k-1)$ 决定，而与数列的项数无关。如图 2.2.9，在 p 乘尖锥的高 h 上取 $x_1<x_2=x_1+\Delta$，由式(1)和式(2)，有

$$
\begin{aligned}
&S(x_2)-S(x_1) \\
&=\frac{b}{h^p}x_2^p\cdot\frac{x_2}{p+1}-\frac{b}{h^p}x_1^p\cdot\frac{x_1}{p+1} \\
&=\frac{b}{(p+1)h^p}\left[(x_1+\Delta)^{p+1}-x_1^{p+1}\right] \\
&=\frac{b}{(p+1)h^p}\sum_{r=0}^{p}C_{p+1}^{r+1}x_1^{p-r}\Delta^{r+1}
\end{aligned}
$$

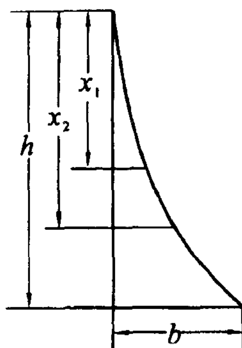


图 2.2.9

$$=\frac{b}{h^p}\sum_{r=0}^{p}\frac{1}{r+1}C_p^r x_1^{p-r}\Delta^{r+1}。\tag{5}$$

对于对数积则有

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{b}{h^p}\sum_{r=0}^{p}\frac{1}{r+1}C_p^r x_1^{p-r}\Delta^{r+1}\right]$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{b\Delta^{p+1}}{(p+1)h^p}\sum_{r=0}^{\infty}C_{p+r}^p\left(\frac{x_1}{h}\right)^r\right]$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{b\Delta^{p+1}}{(p+1)h^p}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x_1}{h}\right)^{p+1}}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{bh\Delta^{p+1}}{(p+1)\ (h-x_1)^{p+1}}。\tag{6}$$

将对数积截为 n 段，使每段高为 $\frac{h}{n}$，在式(6)中令 $x_1=\frac{n-k}{n}h$，$\Delta=\frac{h}{n}$，如图 2.2.8 所示，自下而上第 k 段面积为

$$S\left(\frac{n-k+1}{n}h\right)-S\left(\frac{n-k}{n}h\right)$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{bh\left(\frac{h}{n}\right)^{p+1}}{(p+1)\left(h-\frac{n-k}{n}\right)^{p+1}}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{bh}{(p+1)k^{p+1}}。\tag{7}$$

式(7)说明，对于给定的 b，h，无论 $n\geqslant 2$ 取何值，对数积自下而上第 k 段面积由 k 决定，故常相等。

由式(4)和式(7)可得

$$S\left(\frac{n-k+1}{n}h\right)-S\left(\frac{n-k}{n}h\right)$$

$$=\alpha\ln\frac{k}{k-1}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{bh}{(p+1)k^{p+1}}。\tag{8}$$

李氏求对数用对数积自下而上的最上一段。在式 (8) 中，令 $k=n$，$\alpha=bh=1$，则

$$S\left(\frac{h}{n}\right)=\ln\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\tag{9}$$

此即李氏所给对数展开式。李氏以式(9)求对数，原著以真数等于 1，2，…，10 为例，其步骤如下。

先求 ln10。将对数积分为 10 段使每段高为$\frac{h}{10}$，第 10 段等于 $\ln\frac{10}{9}$，故需求第 2 至 9 段共积。由图 2.2.10 所示，

$$\ln 10=S_{共}=S_B+S_5+S_b+S_2。$$

由式(7)可知，$S_B=S_b=S_2$。故 $S_{共}=3S_2+S_5$。由式(9)，

$$S_2=S\left(\frac{h}{2}\right)=\ln 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots$$

$$=0.693\ 147\ 13,$$

$$S_5=S\left(\frac{h}{5}\right)=\ln\frac{5}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{2\cdot 5^2}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\cdots$$

$$=0.223\ 143\ 53。$$

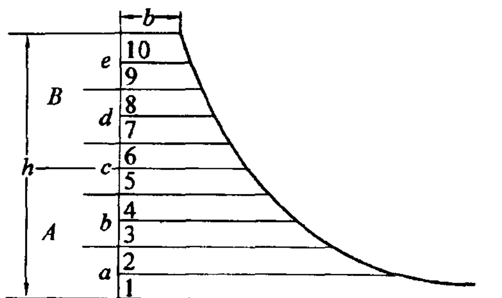


图 2.2.10

故

$$\ln 10 = S_{共} = 3S_2 + S_5 = 3\ln 2 + \ln\frac{5}{4} = 2.302\ 584\ 92。$$

次求对数根，$\lg e = \dfrac{1}{\ln 10} = 0.434\ 294\ 51$。

后求常用对数，由式(9)可得

$$\lg\frac{n}{n-1} = \lg e \cdot \ln\frac{n}{n-1} = \lg e\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \cdots\right)。$$

由此可得

$$\lg 2 = \lg e \cdot \ln 2 = 0.301\ 030\ 00,$$

$$\lg 3 = \lg 2 + \lg\frac{3}{2} = 0.477\ 121\ 26,$$

$$\lg 7 = \lg 6 + \lg\frac{7}{6} = 0.845\ 098\ 05。$$

其余 lg 4，lg 5，lg 6，lg 8，lg 9 据对数性质求得。

若建立坐标系如图 2.2.11，则对数积实即双曲线 $y = \dfrac{bh}{h-x}$ 介于 x 轴，y 轴及直线 $x = h$ 的部分。然而原著不详对数积的由来。据《对数探源》小序及同书卷上第八条内容可以作如下的推测。其

第八条曰：

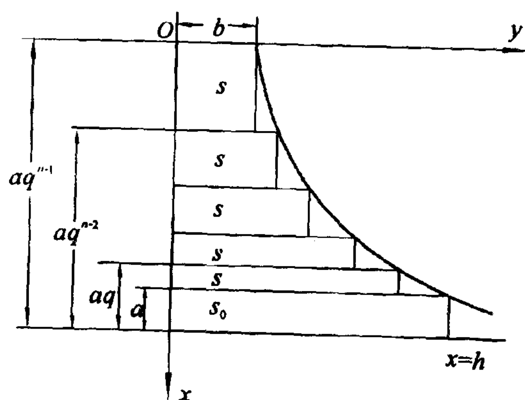


图 2.2.11

“若于其线上作连比例诸率线，各如其线截之，则逐层前率截积与后率截积之较其积皆同也。”

本条说明，当真数成等比数列时，相应的对数积成等差数列，此系对数的基本性质。设以等比数列

$$a，aq，aq^2，\cdots，aq^{n-2}，aq^{n-1}=h$$

表示真数 N，其中 $q=\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$。以等差数列

$$S_0，S_0+S，S_0+2S，\cdots，S_0+(n-2)S，S_0+(n-1)S$$

表示相应的对数 $\alpha \ln N$。若以线段表示真数 N，以矩形面积表示对数 $\alpha \ln N$，则可得“拟对数积”略如图 2.2.11 中的阶梯形。将上列等比数列相邻两项相减得

$$a(q-1)，a(q-1)q，\cdots，a(q-1)q^{n-2}，$$

等差数列相邻两项相减得

$$S，S，\cdots，S。$$

等比数列相邻两项的差即矩形 S 的宽，由此可得矩形的长

$$\frac{S}{a(q-1)},\ \frac{S}{a(q-1)q},\ \cdots,\ \frac{S}{a(q-1)q^{n-2}}=b,$$

或即

$$bq^{n-2},\ bq^{n-3},\ \cdots,\ bq,\ b。$$

在图 2.2.11 的坐标系中，有

$$x_0=h-aq^{n-1}=0,\qquad y_0=b,$$

$$x_1=h-aq^{n-2}=h(1-q^{-1}),\qquad y_1=bq$$

$$x_2=h-aq^{n-3}=h(1-q^{-2}),\qquad y_2=bq^2$$

$$\cdots\qquad\qquad\cdots$$

$$x_{n-2}=h-aq=h\ [1-q^{-(n-2)}],\qquad y_{n-2}=bq^{n-2},$$

一般地，

$$x_k=h(1-q^{-k}),\qquad y_k=bq^k。$$

由此可得

$$(h-x_k)y_k=hq^{-k}\cdot bq^k=bh。$$

当 $n\to\infty$ 时，$q=\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}\to 1$，矩形 S 的宽 $a(q-1)q^{n-2}\to 0$，又因 a 可以取得任意小，故极限情形下，“拟对数积”即为对数积。此时，

$$(h-x)y=bh$$

或即

$$y=\frac{bh}{h-x}。\tag{10}$$

将式(10)等号右端的分式作除法可得

$$y=\frac{bh}{h-x}=b+\frac{b}{h}x+\frac{b}{h^2}x^2+\frac{b}{h^3}x^3+\cdots$$

此式说明，在图 2.2.11 对数积的高 h 上任取一点使距上端为 x，过该点作截线使平行于底，则此截线可分解为无穷项的和，各项

依次为 b，$\frac{b}{h}x$，$\frac{b}{h^2}x^2$，…。由式(1)可知，该对数积依次由长方形，一乘尖锥，二乘尖锥……累加而成。故可用尖锥求积公式求其第 k 段积。

综上可知，李氏对数积的第 k 段积应为

$$\int_{\frac{n-k}{h}h}^{\frac{n-k+1}{n}h}\frac{bh}{h-x}\mathrm{d}x=bh\ \ln\frac{k}{k-1},$$

而式（7）所给第 k 段积为

$$a\ \ln\frac{k}{k-1}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{bh}{(p+1)k^{p+1}}。$$

故当 $k=n$，$a=bh=1$ 时，则有

$$\int_{0}^{\frac{h}{n}}\frac{1}{h-x}\mathrm{d}x=\ln\frac{n}{n-1}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(p+1)n^{p+1}}。$$

此即李氏求对数法之根据所在。

《代微积拾级》与《代数术》所给对数展开式为

$$\ln\frac{n}{n-1}=2\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3(2n-1)^3}+\frac{1}{5(2n-1)^5}+\cdots\right]。\quad(11)$$

此式与《对数探源》所得公式(9)形式不同。李氏指出两者不同之故在于所用推导方法不同，“盖同用一合尖锥，但一为正法，一为变法耳。”进而李氏用尖锥术导出式(11)，是为《对数尖锥变法释》的主要内容。

李氏将两式推导方法之异同概括为

“《对数探源》法乃依真数截合尖锥为若干层，取其最上一层也。西法则又截最上一层为上下二层，而取下一层方面及诸偶乘尖锥截积倍之也。其两数恰合者，则诸尖锥廉隅正负相消之理也。”其具体推导过程包括四条命题，兹就其要者概述于后。

第一条说明，p 乘尖锥截为上下两段使每段高为 $\frac{h}{2}$，则上段仍为一 p 乘尖锥，下段由方、廉、隅组成，而方、廉、隅的系数依

贾宪三角形分布。在式(5)中，令 $x_1=\Delta=\frac{h}{2}$，则

$$
\begin{aligned}
S(x_2)-S(x_1)&=S(h)-S(\frac{h}{2})\\
&=\frac{b}{h^p}\sum_{r=0}^{p}\frac{1}{r+1}C_p^r\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}\\
&=\sum_{r=0}^{p}C_p^r\frac{1}{r+1}\cdot\frac{b}{2^p}\cdot\frac{h}{2}。
\end{aligned}
$$

此式表示，p 乘尖锥的下段是底为$\frac{b}{2^p}$，高为$\frac{h}{2}$的方、廉、隅之和，方、廉、隅的系数是 C_p^r。当 $r=0$ 时为方，$r=p$ 时为隅，$r=1$，2，…，$(p-1)$时为各廉。

第二条说明，以 p 乘尖锥的底和高为邻边的长方形其方内锥外的部分由各廉和隅组成，廉、隅的系数依贾宪三角形分布，系数的符号为奇项正偶项负。如图 2.2.12，在 p 乘尖锥的高 h 上任取一点，过该点作截线平行于底。设此截线距尖锥顶点为 x，距底为 Δ。由式(1)可知

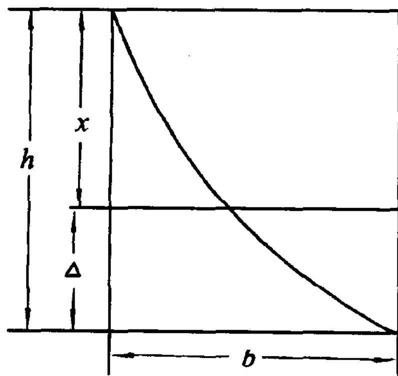


图 2.2.12

$$f(\Delta)=b-\frac{b}{h^p}(h-\Delta)^p=\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r+1}C_p^r\frac{b}{h^r}\Delta^r。$$

此式表示，方内锥外的部分由底为 b，高为 h 的廉、隅组成，廉、隅的系数是$(-1)^{r+1}C_p^r$。当 $r=1$ 时为第一廉，$r=p$ 时为隅。其面积为

$$S(\Delta)=\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r+1}C_p^r\frac{b\Delta^r}{h^r}\cdot\frac{\Delta}{r+1}。$$

当 $\Delta=h$ 时，$S(h)=\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r+1}C_p^r\frac{bh}{r+1}$。

故以 b，h 为邻边的长方形其面积可表为

$$S=\frac{bh}{p+1}+\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r+1}C_p^r\frac{bh}{r+1}。\qquad (12)$$

其中，等号右端第一项 p 乘尖锥的面积称为方。

据以上两条可以导出式(11)。将对数积最上一段即第 n 段分割为一个高为$\frac{h}{n}$，底为 b 的矩形，所余尖锥合积又分为上下二层使其高各为$\frac{h}{2n}$，分别求积而后求和，正负相消得式(11)。如图2.2.13，长方形 $ABCD$ 为一乘尖锥下层的方，直角三角形 ACD 和 ABD 为方的同数。

对于第 n 段的 p 乘尖锥，由式(1)和式(2)可得上层面积

$$S_{上}=\frac{1}{p+1}\cdot\frac{b}{h^p}\left(\frac{h}{2n}\right)^p\cdot\left(\frac{h}{2n}\right)=\frac{bh}{(p+1)(2n)^{p+1}}。$$

在式(5)中，令 $x_1=\Delta=\frac{h}{2n}$，则有下层面积

$$S_{下}=\frac{b}{h^p}\sum_{r=0}^{p}\frac{1}{r+1}C_p^r\left(\frac{h}{2n}\right)^{p+1}=\frac{bh}{(2n)^{p+1}}\sum_{r=0}^{p}C_p^r\frac{1}{r+1}。$$

式中，当 $r=0$ 时为 p 乘尖锥下层的方，即

$$S_{下方}=\frac{bh}{(2n)^{p+1}}。$$

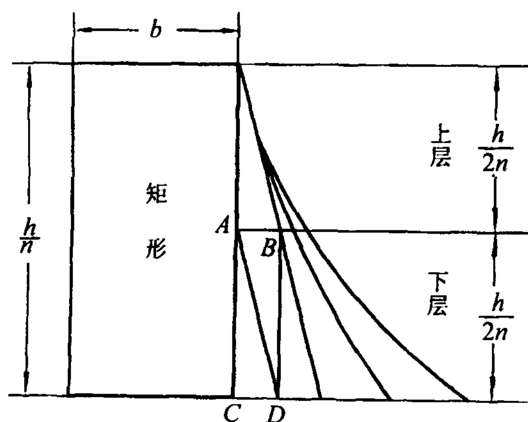


图 2.2.13

依第二条之理求下方同数。p 乘尖锥下层的方之底即上层的尖锥之底$\frac{b}{(2n)^p}$，下层的方之高即$\frac{h}{2n}$。由式(12)得

$$S_{下同}=\frac{1}{p+1}\cdot\frac{b}{(2n)^p}\cdot\frac{h}{2n}+\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r+1}C_p^r\frac{1}{r+1}\cdot\frac{b}{(2n)^p}\cdot\frac{h}{2n}$$

$$=\frac{bh}{(p+1)(2n)^{p+1}}+\frac{bh}{(2n)^{p+1}}\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r+1}C_p^r\frac{1}{r+1}。$$

故第 n 段的 p 乘尖锥面积

$$S_p=S_{上}+S_{下}+S_{下方}-S_{下同}$$

$$=\frac{2bh}{(2n)^{p+1}}\left(C_p^0+\frac{1}{3}C_p^2+\frac{1}{5}C_p^4+\frac{1}{7}C_p^6+\cdots\right)。$$

又由图 2.2.13，显然有 $S_{矩}=\frac{bh}{n}$。

故对数积第 n 段面积

$$S\left(\frac{h}{n}\right)=S_{矩}+\sum_{p=1}^{\infty}S_p$$

$$=\frac{bh}{n}+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2bh}{(2n)^{p+1}}\left(C_p^0+\frac{1}{3}C_p^2+\frac{1}{5}C_p^4+\frac{1}{7}C_p^6+\cdots\right)$$

$$=2bh\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2p+1)(2n)^{2p+1}}\sum_{r=0}^{\infty}C_{2p+r}^{2p}\frac{1}{(2n)^{r}}\right]$$

$$=2bh\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2p+1)(2n)^{2p+1}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2p+1}}\right]$$

$$=2bh\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)(2n-1)^{2p+1}}。$$

而由式(4)可知

$$S\left(\frac{h}{n}\right)=\alpha\ln\frac{n}{n-1}。$$

令 $\alpha=bh=1$ 则得式(11)。故知式(9)与式(11)等价。

此外，李氏在《弧矢启秘》中还运用尖锥术讨论了三角函数和反三角函数的幂级数展开式。主要结果有

$$\alpha=\tan\alpha-\frac{1}{3}\tan^{3}\alpha+\frac{1}{5}\tan^{5}\alpha-\frac{1}{7}\tan^{7}\alpha+\cdots$$

$$\alpha^{2}=\sec^{2}\alpha-\frac{6}{9}\sec^{4}\alpha+\frac{46}{90}\sec^{6}\alpha-\frac{44}{105}\sec^{8}\alpha+\cdots$$

$$\tan\alpha=\alpha+\frac{1}{3}\alpha^{3}+\frac{2}{15}\alpha^{5}+\frac{17}{315}\alpha^{7}+\cdots$$

$$\sec\alpha=1+\frac{1}{2}\alpha^{2}+\frac{5}{24}\alpha^{4}+\frac{61}{721}\alpha^{6}+\cdots$$

《垛积比类》是中国传统数学的垛积术集大成之作。该书小序称垛积术“其用亦广矣哉。顾历来算书中不恒见。”是故予以系统而深入的论述。垛积术包括垛积求和(有高求积)及反求(有积求高)两方面的内容，而以前者为之基础。除三角垛外，该书共给出以下六类垛积求和公式，即乘方垛、三角自乘垛、三角变垛及每垛的诸支垛求和公式。

乘方垛求和。如图2.2.14，第 p 斜行($p=1,2,3\cdots$)前 n 个数的和称为 p 乘方垛。李氏给出其求和公式

$$\sum_{r=1}^{n}r^{p+1}=\sum_{i=1}^{p+1}\left[A_{i}^{p}\sum_{r=1}^{n-i+1}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p)\right],$$

1

1　1

1　2　1　$p=1$

1　3　4　1　$p=2$

1　4　9　8　1　$p=3$

1　5　16　27　16　1

……

……

图 2.2.14

1

1　1　$p=1$

1　4　1　$p=2$

1　11　11　1　$p=3$

1　26　66　26　1

……

……

图 2.2.15

其中 A_i^p 为“乘方垛各廉表”第 p 横行从左至右第 i 个数，如图 2.2.15 所示。李氏给出其造表法

$$A_i^p=(p-i+2)A_{i-1}^{p-1}+iA_i^{p-1},$$

由数学归纳法可以证明该表有如下的性质：

$$\sum_{i=1}^{p+1}A_i^p=(p+1)!。$$

三角自乘垛求和。如图 2.2.16，第 p 斜行($p=1,2,3,\cdots$)前 n 个数的和称为三角自乘垛第 p 垛。李氏给出其求和公式

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)\right]^2$$
$$=\sum_{i=1}^{p+1}\left[C_i^p\sum_{r=1}^{n-i+1}\frac{1}{(2p)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+2p-1)\right],$$

其中 C_i^p 为三角自乘垛各廉表第 p 横行从左至右第 i 个数，如图 2.2.17 所示。

1

p=1

1　1

p=2

1　4　1

p=3

1　9　9　1

1　16　36　16　1

……

……

图 2.2.16

1

1　1　p=1

1　4　1　p=2

1　9　9　1　p=3

1　16　36　16　1

……

……

图 2.2.17

三角变垛求和。李氏给出三角一变垛、三角二变垛、三角三变垛的求和公式，且称“四变以下诸垛今不复演，学者自能隅反也。”依所示规律可得三角 s 变垛求和

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(p-1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-2)r^{s}$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1}\left[B_i^s\sum_{r=1}^{n-i+1}\frac{1}{(p+s-1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p+s-2)\right]。$$

当 $s=1$，2，3，…时，分别称为三角一变垛，三角二变垛，三角三变垛……其中 B_i^s 为多项式三角形第 s 横行从左至右第 i 个值，如图 2.2.18 所示。

1

$1\quad (p-1)\qquad s=1$

$1\quad 1+3(p-1)\quad (p-1)^2\qquad s=2$

$1\quad 4+7(p-1)\quad 1+4(p-1)+6(p-1)^2\quad (p-1)^3\qquad s=3$

……

图 2.2.18

该三角形具有如下的性质：

$$B_i^s=(s-i+p)B_{i-1}^{s-1}+iB_i^{s-1},$$

$$\sum_{i=1}^{s+1} B_i^s = \prod_{i=1}^{s} (p+i-1)。$$

显然，当 $s=0$ 时，该垛即为三角垛。当 $p=2$ 时，该垛即为乘方垛，此时，

$$B_i^s = A_i^p,\quad \sum_{i=1}^{s+1} B_i^s = (s+1)!,$$

亦即多项式三角形变为乘方垛各廉表。

乘方垛 p 支垛求和。以 p 乘方垛为第一垛，累次求和，得乘方垛第 p 支垛。李氏给出第 p 支垛第 k 垛的和

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{n}{}^{k} r^{p+1}\\ &=\sum_{i=1}^{p+1}\left[A_i^p \sum_{r=1}^{n-i+1} \frac{1}{(p+k)!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+p+k-1)\right],\end{aligned}$$

其中 A_i^p 的意义同乘方垛。当 $p=1,2,3\cdots$ 时，分别是一乘方支垛，二乘方支垛，三乘方支垛……对于固定的 p，当 $k=1,2,3,\cdots$ 时，分别是 p 乘方支垛的第一垛，第二垛，第三垛……符号 $\sum^{k}$ 表示 k 次求和($k\geqslant 1$)，即以($k-1$)次求和结果为通项再求和，下同。

三角自乘垛 p 支垛求和。以三角自乘垛第 p 垛为第一垛，累次求和，得三角自乘垛第 p 支垛。李氏给出第 p 支垛第 k 垛的和

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{n}{}^{k}\left[\frac{1}{p!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)\right]^2\\ &=\sum_{i=1}^{p+1}\left[C_i^p \sum_{r=1}^{n-i+1} \frac{1}{(2p+k-1)!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+2p+k-2)\right],\end{aligned}$$

其中 C_i^p 的意义同三角自乘垛。当 $p=1,2,3,\cdots$ 时，分别是子支垛，丑支垛，寅支垛……对于固定的 p，当 $k=1,2,3,\cdots$ 时，分别是 p 支垛的第一垛，第二垛，第三垛……

三角变垛 p 支垛求和。原著仅给出三角一变垛 p 支垛的求和公式，“二变、三变诸支垛今亦不复演，学者自能隅反也。”可以

归纳出三角 s 变垛 p 支垛第 k 垛的和

$$\sum_{r=1}^{n}{}^{k}\frac{1}{(p-1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-2)r^{s}$$
$$=\sum_{i=1}^{s+1}\left[B_i^s\sum_{r=1}^{n-i+1}\frac{1}{(p+k+s-2)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p+k+s-3)\right]。$$

当 $s=1$ 时，上式为三角一变垛 p 支垛第 k 垛。当 $p=1$，2，3，…时，分别表示三角一变垛的一支垛(三角垛)，二支垛(三角一乘支垛)，三支垛(三角二乘支垛)……三角一变垛的支垛"借作三角支垛"而载于原著卷一。故三角垛亦即贾宪三角形仅是三角一变垛的一支垛。

原著不载上述各垛的推导过程。由三角垛的性质可以证明其正确性。该书卷一给出三角垛

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$
$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)。$$

由此易知

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$
$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p)$$
$$-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p)。\qquad(13)$$

该式的意义是，贾宪三角形第 p 斜行前 n 个数的和等于第$(p+1)$斜行前 n 个数的和减去前$(n-1)$个数的和。依该式可将 p 乘三角垛化为$(p+1)$乘三角垛。

《垛积比类》所给各垛求和公式，其推导的关键在于乘方垛求和。其他各垛均可归结为乘方垛而后求和。兹就乘方垛前两垛即乘方垛求和公式 $p=1$，2 的情形为例说明之。

一乘方垛 $\sum\limits_{r=1}^{n} r^2$：

因为　$\sum\limits_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)=\frac{1}{2!}\left(\sum\limits_{r=1}^{n}r^2+\sum\limits_{r=1}^{n}r\right)$，

所以　$\sum\limits_{r=1}^{n}r^2=2!\sum\limits_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)-\sum\limits_{r=1}^{n}r$。

由式(13)，

$$\sum_{r=1}^{n}r=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{2!}r(r+1),$$

故　$\sum\limits_{r=1}^{n}r^2=\sum\limits_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)+\sum\limits_{r=1}^{n-1}\frac{1}{2!}r(r+1)$。

二乘方垛 $\sum\limits_{r=1}^{n} r^3$：

因为　$\sum\limits_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)=\frac{1}{3!}\left(\sum\limits_{r=1}^{n}r^3+3\sum\limits_{r=1}^{n}r^2+2\sum\limits_{r=1}^{n}r\right)$，

所以　$\sum\limits_{r=1}^{n}r^3=3!\sum\limits_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)-3\sum\limits_{r=1}^{n}r^2-2\sum\limits_{r=1}^{n}r$。

由一乘方垛及式(13)，

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}r^2&=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{2!}r(r+1)\\&=\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)\right]+\\&\quad\left[\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)-\sum_{r=1}^{n-2}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)\right]\\&=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)-\sum_{r=1}^{n-2}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}r&=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{2!}r(r+1)\\&=\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)\right]-\end{aligned}$$

$$\left[\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)-\sum_{r=1}^{n-2}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)\right]$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)-2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)+\sum_{r=1}^{n-2}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2),$$

故

$$\sum_{r=1}^{n}r^3=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)+4\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)+\sum_{r=1}^{n-2}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)。$$

将乘方垛表达式的各项系数 1，1；1，4，1；…按三角形排列，即得“乘方垛各廉表”，如图 2.2.15 所示。

如前所述，式(2)亦即 $V=\frac{bh}{p+1}$ 为尖锥术的主要的计算公式，而原著不载其推导过程。考察原著，可以认为，该公式的导出当与中国传统数学的极限思想和乘方垛有关。

如前所述，空间的 p 乘尖锥与 $(p-1)$ 乘方垛有相同的积迭规律。《垛积比类》所论各垛，除以文字及数表叙述其规律外，每垛尚有垛积图形。其乘方垛之前三垛可绘如图 2.2.19。按李氏对线、面、体的解释，元垛每层为线，一乘方垛每层为面，二乘方垛每层为体，三乘方垛以上依此类推。依尖锥术的线面体互变的概念，$(p-1)$ 乘方垛可变为“拟 $(p-1)$ 乘方垛”，如图 2.2.20 所示，其层数和每层底面积值与 $(p-1)$ 乘方垛相同。令其底面积为 $a^p=b$，高为 h，层数为 n，则每层厚 $\frac{h}{n}$。第 k 层距第一层每 $x=k\frac{h}{n}$，即 $k=\frac{n}{h}x$，则第 k 层底面积 k^p 可表为

$$f(x)=\left(\frac{n}{h}x\right)^p。$$

当 $x=h$ 时，$f(h)=n^p=a^p=b$，故 $\left(\frac{n}{h}\right)^p=\frac{b}{h^p}$。于是

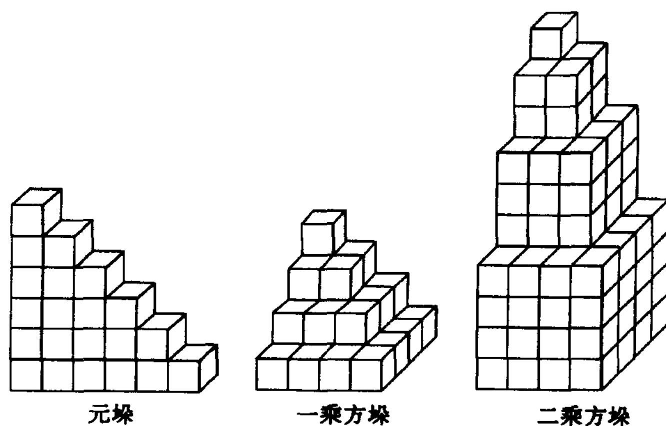


图 2.2.19

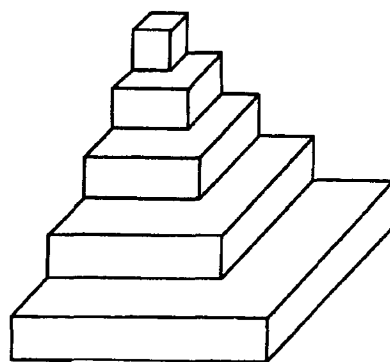


图 2.2.20

$$f(x)=\frac{b}{h^p}x^p。$$

从而第 k 层的底面积为

$$f\left(k\cdot\frac{h}{n}\right)=\frac{b}{h^p}\left(k\cdot\frac{h}{n}\right)^p=b\left(\frac{k}{n}\right)^p,$$

第 k 层的体积为

$$\frac{h}{n}\cdot b\left(\frac{k}{n}\right)^p=\frac{bh}{n^{p+1}}\cdot k^p,$$

拟$(p-1)$乘方垛的体积为

$$V'=\sum_{k=1}^{n}\frac{bh}{n^{p+1}}\cdot k^p=\frac{bh}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p。$$

由 p 乘方垛求和公式

$$V'=\frac{bh}{n^{p+1}}\sum_{i=1}^{p}\left[A_i^{p-1}\sum_{r=1}^{n-i+1}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)\right]。$$

令拟$(p-1)$乘方垛的层数“渐增渐迭”，使每层“如纸之薄”，亦即令 $n\to\infty$，并注意到乘方垛各廉表性质 $\sum\limits_{i=1}^{p}A_i^{p-1}=p!$，则有空间 p 乘尖锥的体积

$$V=\lim_{n\to\infty}V'=\frac{bh}{p+1}。$$

此时，拟$(p-1)$乘方垛即为空间的 p 乘尖锥。

李氏在《椭圆新术》及《级数回求》中讨论了实引(真近点角 θ)与平引(平近点角 M)的互求问题，其中涉及到椭圆部分面积的计算。互求问题的关键是求解开普勒方程

$$M=E-e\sin E,$$

其中 $e=\frac{c}{a}$，E 为借积角(偏近点角)。在这一工作中，李氏创造性地将无穷级数引入椭圆轨道的计算，以幂级数展开式给出上述方程的解。[①]

① 冯立升，牛亚华. 李善兰对于椭圆及其应用问题的研究. 见：数学史研究文集，第三辑. 1992

此外，《四元解》二卷(1846年顾观光序)、《麟德术解》三卷(1848年自序)分别阐述朱世杰四元术和李淳风《麟德历》的二次内插法。

第二节　徐有壬及其《割圆八线缀术》

徐有壬，字君青，亦字钧卿，浙江乌程(今湖州)人。嘉庆五年一月十八日(1800,2,11)生，咸丰十年四月十三日(1860,6,2)卒。道光九年(1829)进士，历任四川成绵龙茂道、四川按察使、云南布政使、湖南布政使至江苏巡抚。徐有壬对数学有浓厚的兴趣，与同时代数学家有广泛的交往。年轻时期，徐有壬居住在北京，曾师事钦天监博士陈杰，与沈钦裴、董祐诚及吴嘉善等人有学术交往。宦游所至，与丁取忠、戴煦及李善兰等人亦有交往。徐氏数学与天文著作不少。未刊者六种九卷，今皆不传，计有《堆垛测圆》三卷、《圆率通考》一卷、《四元算式》一卷、《校正开元占经九执术》一卷、《古今积年解源》二卷、《强弱率通考》一卷。陆续刊行者由其侄徐震翰、侄孙徐树勋汇刻为《务民义斋算学》九种十六卷，是为成都算学书局本。其中，数学著作七种十二卷，即《测圆密率》三卷、《垛积招差》一卷、《椭圆正术》一卷、《椭圆求周术》一卷、《截球解义》一卷、《弧三角拾遗》一卷、《割圆八线缀术》四卷。最后一种由吴嘉善述草(1862)，左潜补草(1873)。《割圆八线缀术》四卷可视为徐氏的代表作。

缀术是徐氏给出的三角函数幂级数表示法。缀术的意义是“求式者连缀而下”。该书以文字叙述的展开式称为术，以缀术书写的展开式称为式。缀术以汉字数目字一、二、三等等表示率数，以侧书的汉字数目字表示级数各项系数的分母，以暗码表示分子，并依固定的格式进行运算。例如，弦求矢式的缀术式为

丨‖三 — 丨四五 — 丨四四七 = 丨四四四九 ∽ 有奇

式中，侧书与暗码表示

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\cdot 4},\ \frac{2}{2\cdot 4^2},\ \frac{5}{2\cdot 4^3},$$

而三、五、七、九分别表示由一率半径 r，二率正弦 $r\sin\alpha$，以连比例四率法所得之三、五、七、九诸率，即

$$\frac{(r\sin\alpha)^2}{r},\ \frac{(r\sin\alpha)^4}{r^3},\ \frac{(r\sin\alpha)^6}{r^5},\ \frac{(r\sin\alpha)^8}{r^7}。$$

故缀术式之弦求矢式亦即

$$r\operatorname{vers}\alpha=\frac{(r\sin\alpha)^2}{2r}+\frac{(r\sin\alpha)^4}{2\cdot 4r^3}+\frac{2(r\sin\alpha)^6}{2\cdot 4^2r^5}+\frac{5(r\sin\alpha)^8}{2\cdot 4^3r^7}+\cdots$$

令 $r=1$，即

$$\operatorname{vers}\alpha=\frac{1}{2}\sin^2\alpha+\frac{1}{2\cdot 4}\sin^4\alpha+\frac{2}{2\cdot 4^2}\sin^6\alpha+\frac{5}{2\cdot 4^3}\sin^8\alpha+\cdots$$

《割圆八线缀术》四卷在诸家研究的基础上，运用比例法、商除法、还原术(级数回求法)、借径术(变换法)等方法给出正弦、正切、正割、正矢等四个三角函数的“八线互求”十二术、“大小八线互求”十八术。例如，令 $r=1$，切求弦式为

$$\sin\alpha=\tan\alpha-\frac{1}{2}\tan^3\alpha+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\tan^5\alpha-\cdots$$

又如，令 $r=1$，小切求大弦，大切求小弦等六式为：

$$\sin n\alpha=n\tan\alpha-\frac{n(n^2+2)}{3!}\tan^3\alpha+\frac{n(n^4+20n^2+24)}{5!}\tan^5\alpha-\cdots$$

$$\sin\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{n}\tan\alpha-\frac{2n^2+1}{3!\ n^3}\tan^3\alpha+\frac{24n^4+20n^2+1}{5!\ n^5}\tan^5\alpha-\cdots$$

$$\tan n\alpha=n\tan\alpha+\frac{n(2n^2-2)}{3!}\tan^3\alpha+\frac{n(16n^4-40n^2+24)}{5!}\tan^5\alpha+\cdots$$

$$\tan\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{n}\tan\alpha-\frac{2n^2-2}{3!\ n^3}\tan^3\alpha+\frac{24n^4-40n^2+16}{5!\ n^5}\tan^5\alpha-\cdots$$

$$\text{vers } n\alpha=\frac{n^2}{2}\tan^2\alpha-\frac{n^2(n^2+8)}{4!}\tan^4\alpha+\frac{n^2(n^4+40n^2+184)}{6!}\tan^6\alpha-\cdots$$

$$\text{vers }\frac{\alpha}{n}=\frac{1}{2n^2}\tan^2\alpha-\frac{8n^2+1}{4!\ n^4}\tan^4\alpha+\frac{184n^4+40n^2+1}{6!\ n^6}\tan^6\alpha-\cdots$$

$$\sec n\alpha=1+\frac{n^2}{2!}\tan^2\alpha+\frac{n^2(5n^2-8)}{4!}\tan^4\alpha+\cdots$$

$$\sec\frac{\alpha}{n}=1+\frac{1}{2!\ n^2}\tan^2\alpha-\frac{8n^2-5}{4!\ n^4}\tan^4\alpha+\cdots$$

其中 $\sec n\alpha$，$\sec\frac{\alpha}{n}$有式而无术，即未能找到系数的一般规律而不能用文字表述该式，其余各式皆有术文。由上列各式可见，当 $n=1$ 时，大小八线互求即八线互求，又当 $n=\frac{1}{m}$时，倍角各线即为分角各线。故倍角各线的展开式为其余各式的基础。

自法国人杜德美将 π，$\sin\alpha$，$\text{vers }\alpha$ 的展开式传入中国之后，很多数学家对三角函数的幂级数展开式以不同的方法予以深入的研究并获得大量的结果，其中有些结果彼此相同或形式不同而实质相同。将这些展开式整理为最简形式，取正弦、正切、正割、正矢等四个函数并以获得先后为序，所得结果列如表 2.2.1、表 2.2.2。表中，杜、明、董、项、李分别指杜德美、明安图、董祐诚、项名达、李善兰。勾识各项为徐有壬所得。

表 2.2.1

知＼求	α	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\sec\alpha$	$\text{vers }\alpha$
α	—	杜	√	李	杜
$\sin\alpha$	明	—	√	项	项
$\tan\alpha$	√	√	—	√	√
$\sec\alpha$	李	√	√	—	√
$\text{vers }\alpha$	明	√	√	√	—

表 2.2.2

知 \ 求	$\sin n\alpha$	$\sin\frac{\alpha}{n}$	$\tan n\alpha$	$\tan\frac{\alpha}{n}$	$\sec n\alpha$	$\sec\frac{\alpha}{n}$	$\operatorname{vers} n\alpha$	$\operatorname{vers}\frac{\alpha}{n}$
$\sin\alpha$	董	董	√	√			√	√
$\tan\alpha$	√	√	√	√			√	√
$\sec\alpha$	√	√					√	√
$\operatorname{vers}\alpha$	√	√	√	√			董	董

表 2.2.2 所空十格表示有式而无术。《割圆八线缀术》四卷是三角函数幂级展开式传入中国以来该项研究的一个比较系统的总结。所给八线互求十二术，大小八线互求十八术使得三角函数的幂级数展开式大体完备。其所创半符号性质的缀术使得幂级数展开式的表示法和运算过程得以简化，在微积分传入中国之前有积极的意义，并在中国数学史上产生一定影响。

第三节 顾观光、邹伯奇的工作

顾观光(1799—1862)，字宾王，号尚之，江苏金山(今上海市金山县)人。博通经传史子而三试不中，遂承世业为医。兼通天文历算，著有《武陵山人遗书》十二种，其中数学著作有《算賸初编》一卷，《算賸续编》一卷，《算賸余稿》二卷，《九数外录》一卷，《九数存古》九卷。

《九数存古》九卷(1892 刊)系将中国古代算题及其算法依《九章算术》卷名分类辑录，所引古算有关书籍自《周髀算经》至《河防通议》凡二十四种，明清算书不录。《九数外录》系将西方数学、天文、力学等知识概括为对数记、割圆八线记、平三角记、弧三角记、各等面体记、圆锥三曲线记等十篇。由此二书可见顾氏算学知识之广泛。《算賸续编》关于对数展开式及其回求的研究

有所心得，其中下列三个展开式应用较为方便。

$$\lg\frac{m}{n}=2\lg e\left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right],$$

$$\lg\frac{m}{n}=\lg e\left[\frac{m-n}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3+\cdots\right],$$

$$\lg\frac{m}{n}=\lg e\left[\frac{m-n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3-\cdots\right]。$$

李善兰的展开式 $\ln\frac{n}{n-1}$ 用于造表较为方便，而径求对数不若上列各式简便。

邹伯奇(1819—1869)，字特夫，广东南海人。博通经传史子，于光学、力学、天文学、地图测绘及数学等方面均有成就，是我国近代科学的先驱者之一。[①]咸丰七年(1857)补为广州学海堂学长。同治五年(1866)、七年两次征召为北京同文馆教习，皆坚以疾辞。著作汇刻为《邹征君遗书》(1873)，另有《测量备要》稿本一册。[②] 其中与数学有关者四种，即《学计一得》一卷、《补小尔雅释度量衡》一卷、《对数尺记》一卷、《乘方捷术》三卷。

上述四种之前二种，系解释儒家经典有关算学的内容，可为读经之助。第三种说明对数尺的构造及用法。现传咸丰三年(1853)邹氏自制对数尺实物。《乘方捷术》三卷论二项式展开式及对数展开式等。此书可能成于伟烈亚力《数学启蒙》(1853)之后，以其所述对数发明经过之文字与《数学启蒙》所述者相近。该书所给对数展开式之前三式与上述顾观光所给者相同，其第四术为“连求三数之较”。设 $t=\frac{m+n}{2}$，$n<t<m$，则由前三术可得

$$\ln\frac{t}{n}=\left[\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\cdots\right],$$

---

① 李迪，白尚恕．我国近代科学先驱邹伯奇．自然科学史研究，1984，3(4)

② 现藏广州博物馆。1980 年笔者曾经查阅。

$$\ln\frac{m}{t}=\left[\left(\frac{m-n}{2t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3-\cdots\right],$$

$$\ln\frac{m}{n}=2\left[\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^5+\cdots\right],$$

$$\ln\frac{t^2}{mn}=2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\frac{1}{6}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^6+\cdots\right]。$$

上述各式用于造表较为简便。

对数由波兰传教士穆尼阁(J. Nicolas Smogolenski，1611—1656)传授薛凤祚(1599—1680)。薛氏著为《比例对数表》一卷(1653)，是为对数传入中国之始。至《数理精蕴》(1723)方详论造表之法，直至清末所译西书续有介绍，如《代数学》十三卷(1859)、《代数术》二十五卷(1873)、《微积溯源》八卷(1874)以及《三角数理》十二卷(1877)等等。对数传入之后，中国数学家以积极的态度予以吸收和发展，二百余年间，成果代出。其中，以戴煦和李善兰的工作最为突出。戴氏的工作由改进《数理精蕴》递次开方求对数法开始，在二项式展开式、对数展开式及三角函数的对数展开式等方面作出重要成就。李氏的工作相当于发现对数可以双曲线下方的面积表示，又以所创尖锥术求得该面积，从而得到对数展开式。两氏的工作皆有《数理精蕴》的影响，而两氏的数学方法已经进入分析数学范围。

第三编

西方近代数学的传入

第一章 李善兰的翻译工作

第一节 翻译工作概况

嘉庆、道光年间，以英国为首的西方列强为牟取高额利润向中国倾销鸦片，由此而引发了1840年的鸦片战争。中国在鸦片战争中的失利，导致西方列强给中国强加了一系列不平等条约，使清政府的封建统治处于风雨飘摇之中。

面对当时资本主义社会的迅速发展，西方列强对中国虎视眈眈的侵略野心，以及国内清廷朝政败坏，农民起义风起云涌的现实，中国一些学者开始从程朱理学与古籍考据中惊醒过来，转而提倡“经世致用”之学，正视现实寻求出路。19世纪的30年代、40年代，出现了以龚自珍、魏源、林则徐、姚莹、包世臣、张际亮等为代表的“经世派”学者，他们在时势的驱动下，开始认识到空洞的理学与琐屑的考据都于世无补，故而摒弃他们原先所致力的旧学，转而研求农政、刑名、典章制度、河工、漕运、盐法、币制、战守、边防、舆地等“实学”，以求“经世致用”。在他们的影响下，清代学术界开始形成一种“经世致用”的新思潮和讲

求实学的新学风。

早在明末清初，西方传教士将西方的学术传入中国，开始了近代西学东渐的历史进程。至康熙末年，由于罗马教廷禁止中国信徒敬天、祭祖和尊孔，干涉中国的内政与民众的传统信仰，雍正元年(1723)遂下令将传教士驱逐至澳门，禁止人民信奉基督教。乾隆帝于1757年进一步下令实行闭关政策。由禁教而演化为闭关自守的状况延续了一百余年，隔绝了中国与西方社会的联系，西学东渐也随之中断。

从19世纪初开始，欧洲商人、冒险家、传教士等纷纷来到东南亚及中国的东南沿海，随之向这些地区传播基督教文化。1807年，伦敦传福音会（London Missionary Society）教士马礼逊(Robert Morrison，1782—1834)到广州，他是最早来华的新教士。随后，1813年英教士米怜（William Miline，1785—1822）到广州，1814年教皇庇亚士（Pious Ⅶ）再次允许耶稣会教士来华传教，天主教教士开始恢复在中国的活动。由于1844年中美《望厦条约》和中法《黄埔条约》的签定，美、法传教士取得了在中国自由传教的特权，在法国大使剌萼尼(T. M. M Josephde Lagrene，1800—1862)的再三照会后，清政府不得不于1846年正式废除雍正元年的禁教令，发还康熙间天主教教堂。这样，西方传教士在中国的传教活动日益活跃。1830—1848年间，在华各国新教教士计98人(其中美国人73人)，至1874年，多达436人。天主教在华的传教活动也得到恢复，至1870年，在华天主教教士达250人。

新教组织不及天主教严密，但精神活泼，方法新颖，对于近代西方文化的传入中国有较大的作用与影响。他们的活动范围大致限于《南京条约》规定的五个通商口岸及其附近地区。在他们所到之处，以传播宗教为本职，也用中文和西文创办报刊、编印书籍，进行文化活动。1818年，英教士米怜在马六甲设立英华书院（Anglo-Chinese College）。该书院于1843年迁至香港，由理雅

各（James Legge，1817—1890）主持，任职的教士有慕维廉（William Muirhead，1822—1900）、伟烈亚力（Alexander Wylie，1815—1887）、艾约瑟（Joseph Edkins，1823—1905）、合信（Benjamin Hobson，1816—1873）、嘉约翰（John G. Kerr，1824—1901）等人。1830年，美国公理会（American Board of Commissions for Foreign Missions）教士裨治文（E. C. Bridgman，1801—1861）、雅裨理（David Abeel，1804—1846）等人来到广州。随着传教士人数的增多和传教范围的扩大，他们在华成立教会组织。1830年，广州的英美教士共同组织了基督教会（Christian Union at Canton），随后，广州的英教士于1834年组织了"益智会"（Diffusion of Useful Knowledge in China），1835年，广州英美教士组织"马礼逊教育会"（Morrison Education Society），创设"马公书院"（Morrison School），致力教会教育，1839年在澳门开学。

这些教会组织与机构，为宗教教育以及传播西方基督教文化，从事编印适合中国情况的书籍的活动。传教士编印的书籍，除大量的宣传宗教的内容外，还有一些非宗教性的、介绍并炫耀西方文明的科技文化书籍。据统计，1810—1867年间在中国的新教教士出版的非宗教性书刊达108种之多，[①] 内容涉及西方历史、地理、政情、风俗、科学技术等。

在西方基督教殖民文化入侵东南亚与中国封建社会内部实学思潮兴起，这两股潮流会合的大势下，晚清中国知识界掀起了翻译西方科学技术书籍的热潮。

1842年，南京条约规定"五口通商"之后，英国传教士麦都思（Walter H. Medhurst，1796—1857）于1843年在上海建立墨海书馆。1849年，聘中国学者王韬（1828—1897）为编辑，开始准备翻译西方科学书籍。

---

① 《剑桥中国晚清史》．上卷．622

伟烈亚力，英国传教士，1815年4月6日出生于英国伦敦，曾入德鲁里西（Drumlithie）的一所文法学校接受启蒙教育，后就读于伦敦的一所中学。毕业后做过木工，曾经受雇于英国刑事法庭、考文特花园等，并加入苏格兰长老会。由于对中国的向往而学习汉语，并且希望到中国传教。1846年，英国传教士理雅各回国，受麦都思的委托，物色一位能够负责经营上海墨海书馆的人，同时，大英圣书公会也提出支付《圣经》委办译本的印刷经费，并提供一名专职印刷员。这样，在理雅各的一位朋友的推荐下，伟烈亚力开始受雇于伦敦会，并学习印刷技术。1847年4月6日，他与伦敦会的另外两位牧师慕维廉、绍思韦尔（Benjamin Southwell，1822—1849）一道从伦敦出发，前往中国，于同年8月抵达上海，开始经营墨海书馆，从此开始了他在中国16年的传教与学术生涯。他一生共有三次在中国生活，第一次是1847～1860年，第二次是作为大英圣书公会在华代理于1863年再次来到中国，于1969年回国，第三次在华时间是1870～1877年。[①]第一次来华不久，就与艾约瑟等人计划翻译西方科技书籍。他是继明末利玛窦之后，将西方近代科学技术传入中国有卓著贡献的传教士，也是著名汉学家，是近代中西文化交流史的重要人物。1860年以前，他的学术活动主要是与中国学者合作翻译西方科技书籍，以后的学术工作主要是汉学研究。

咸丰二年（1852）五月，中国数学家李善兰来到上海，居于大境杰阁，经麦都思的介绍与伟烈亚力相识。伟烈亚力十分佩服李善兰的数学才能，从而邀请他共同翻译《几何原本》后9卷。从该年六月初开始，历四年，至1856年告竣，1857年二月由松江韩应陛刊刻。李善兰在沪十年，除《几何原本》外，还与伟烈亚力

① 汪晓勤.《伟烈亚力与中西数学交流》. 中科院自然科学史研究所博士论文，1999(7)

翻译侯失勒（Herschel，1792—1871）的《谈天》（Outline of Astronomy）十八卷（1859）、罗密士（Elias Loomis，1811—1889）的《代微积拾级》（Elements of Analytical geometry and of the Differential and Integral Calculus，1851）18卷（1859）、棣麽甘（Augustus De Morgan，1806—1871）的《代数学》（Elements of Algebra，1835）13卷（1859）与伟烈亚力、傅兰雅共同翻译了奈端（今作牛顿，Isaac Newton，1642—1712）的《奈端数理》（Principia）若干卷（四册，未刊，1859），又与艾约瑟（Joseph Edkins，1823—1905）共同翻译胡威立（William Whewell，1794—1866）的《重学》（Mechanics）20卷（1859）附《圆锥曲线说》3卷（约1860），与韦廉臣（A. Williamson，1829—1890）共同翻译林德利的《植物学》8卷（1859）、《照相法》（1860，部分）。①

第二节　《代微积拾级》介绍

《代微积拾级》是西方近代高等数学传入中国的第一部译著。早在1853年，伟烈亚力就设想向中国翻译西方数学的微积分学内容。他在其所著的《数学启蒙》（1853）的序言中写到："余自西土远来中国，以传耶稣之道为本，余则兼习艺能。爰述一书，曰《数学启蒙》，凡二卷。举以授塾中学徒，由浅及深，则其知之也易。譬诸小儿，始而匍匐，继而扶墙，后乃能疾走。兹书之成，姑教之匍匐耳，扶墙徐行耳。若能疾走，则有代数、微分诸书在，余将续梓之。"②约于1856年开始，他与李善兰合作翻译《代数学》与《代微积拾级》，1859年两书译毕并相继出版。

《代微积拾级》译自罗密士所写的教材。美国数学家罗密士

① 《剑桥中国晚清史》. 上卷. 622

② 伟烈亚力. 算学启蒙. 序. 光绪二十二年格致书室铅印本

1830年毕业于耶鲁学院，1836年成为美国西预备役学院数学与自然哲学教授，1844～1860年为纽约市立大学数学与自然哲学教授，1860年以后到耶鲁大学任自然哲学和天文学教授。[①]他一生著作丰富，除《代微积拾级》外，罗密士的其他一些数学著作也被翻译成中文，如《形学备旨》10卷，《对数表》1卷，《圆锥曲线》3卷，《代形合参》3卷，《八线备旨》4卷，《微积学》（刘光照译，1912）。

《代微积拾级》是面向一般读者的微积分教材，通俗易懂，便于初学者学习。全书由十八卷构成，兹将各卷内容介绍如下：

第一卷至第九卷为解析几何的内容。

第一卷，用代数方法解几何问题。

第二卷，作方程图法。关于代数量的几何作图法。有

$$x=a\pm b,\ x=ab,\ x=abc,\ x=\frac{ab}{c},\ x=\frac{abc}{de},$$

$$x=\sqrt{ab},\ x=\sqrt{a^2\pm b^2},\ x=a\pm\sqrt{a^2-b^2},$$

的作图，以及作三角形的内接正方形、两圆的公切线问题。

第三卷，论点和线。介绍极坐标系、斜坐标系、直角坐标系、点的坐标等概念，以及各种坐标系下的直线方程、两点间的距离公式、两直线交角的正切公式、坐标系变换等。

第四卷，论圆。内容包括平面直角坐标系与极坐标系下圆的各种方程、过圆周上任一点的切线方程。

第五卷，论抛物线。内容有抛物线的定义、直角坐标系和极坐标系内抛物线的各种方程、抛物线的切线方程，以及抛物线的一些性质，如：

1. 第四款：过抛物线上一点的法线平分该点的焦点半径（带径）与直径（径）的夹角。

---

① 张奠宙．代微积拾级的原书和原作者．中国科技史料，1992，13(2)：88

2. 第九款：从抛物线 $y^2=2px$ 上一点(x,y)作 y 轴垂线，截得抛物线弓形面积等于$\frac{4}{3}|xy|$；此款是采用不严格的积分方法证明的。

还给出了求抛物线的次切线与次法线公式。所谓次切线指切线在 x 轴上的射影。次法线指法线在 x 轴上的射影。

第六卷，论椭圆。介绍椭圆定义、椭圆的方程、椭圆的切线和法线方程，并给出椭圆上(x',y')点的次切线长：$\frac{A^2}{x'}-x'=\frac{A^2-x'^2}{x'}$与次法线长$\frac{A^2-B^2}{A^2}x'$。

该卷还讨论了椭圆的以下性质：

1. 第四款：对于长半径为 A、短半径为 B 的椭圆，是将半径为 A 的圆沿 y 轴方向按比 A/B 压缩得到的。

2. 第五款：椭圆的直径为其中心所平分。

3. 第九款：椭圆上一点的法线平分该点的两焦点半径(带径)所夹的内角，切线平分该点的两焦点半径所夹的外角。

4. 第十款：设 E，F 分别是椭圆长径的两个端点，O 为其中心，P 是椭圆上的一点。PT 为切线，M 是椭圆上的任一点。若 $MF /\!/ PT$，则 $ME /\!/ PO$。

5. 第十三款：若两共轭直径(相属二半径)为 $2a$ 及 $2b$，则 $a^2+b^2=A^2+B^2$。

6. 第十四款：椭圆上任一点 M(径端)的焦点半径之积(距二心线之矩形)等于它的对应半共轭直径(半属径)的平方(正方)。

7. 第十五款：设 MM' 与 NN' 为抛物线的两条共轭直径，则以 MM' 和 NN' 为邻边的平行四边形与抛物线相切，并且其面积等于 $4AB$。

8. 第十七款：椭圆面积为 πA^2 与 πB^2 的比例中项，即椭圆面积 $S=\pi AB$。

第七卷，论双曲线。关于双曲线的定义、双曲线及其共轭双曲线的方程、双曲线的切线与法线方程以及双曲线的以下性质：

1. 第五款：设 M 为双曲线上的任一点，P，Q 为双曲线在 x 轴(实轴)上的两顶点，MP 和 MQ 与 x 轴的交角分别为 α，β，则 $\tan\alpha\tan\beta=-A^2/B^2$。

2. 第八款：双曲线上任一点的切线平分该点的焦点半径间的内角。

3. 第九款：设 A，A' 为双曲线在 x 轴(实轴)上的两顶点，D 为双曲线上的任一点，DT 为切线，AP 为弦. 若 $PA /\!/ DT$，则直径；$DD' /\!/ PA'$。

4. 第十二款：若双曲线实半轴与虚半轴为 A，B，两共轭直径(相属二半径)为 $2a$，$2b$，则 $a^2-b^2=A^2-B^2$。

5. 第十二款：设 MM' 与 NN' 为双曲线的两条共轭直径，则以 MM' 和 NN' 为邻边的平行四边形与双曲线相切，并且其面积等于 $4AB$。

并且讨论了双曲线的渐近线的方程与性质。

第八卷，“诸曲线依代数式分类”，讨论代数曲线的分类。对于二次方程，只考虑圆、抛物线、椭圆、双曲线四类曲线，没有考虑退化的两平行直线。对于三次方程，按牛顿分类法，分为四类形式的方程：

1. $Fy^2+Ey=Ax^3+Bx^2+Cx+D$；
2. $xy=Ax^3+Bx^2+Cx+D$；
3. $y^2=Ax^3+Bx^2+Cx+D$；
4. $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$。

第 1 类方程共有 73 种曲线，第 2 类方程仅有 1 种曲线(三齿线)，第 3 类方程共有 5 种曲线，第 4 类方程也仅有 1 种曲线(立方抛物线)。

根据欧拉(欧楼)分类法，认为四次方程有 146 类，共 5 千

多种。

第九卷，“论越曲线”，讨论超越曲线。主要介绍摆线、对数曲线、亚奇默德螺线、双曲螺线、对数螺线的方程与作图法。

从第十卷至十六卷是微分学的内容。

第十卷，论微分。介绍微分学的基本概念与运算。主要有常数、变数、函数、显函数、隐函数、增函数、减函数、极限、微分等概念，导数称之为微系数。给出了以下微分公式与运算法则：

1. $\mathrm{d}(x^n)=nx^{n-1}\mathrm{d}x$；
2. $\mathrm{d}[Cf(x)]=C\mathrm{d}[f(x)]$；
3. $\mathrm{d}(C)=0, \mathrm{d}[f(x)\pm C]=\mathrm{d}[f(x)]$；
4. $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+g(x,\Delta x)(\Delta x)^2$；
5. $\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}[f(x)]\pm \mathrm{d}[g(x)]$；
6. $\mathrm{d}[f(x)g(x)]=g(x)\mathrm{d}[f(x)]+f(x)\mathrm{d}[g(x)]$；
7. $$\begin{aligned}\mathrm{d}[f(x)g(x)\cdots h(x)]=&g(x)\cdots h(x)\mathrm{d}[f(x)]+\\&f(x)\cdots h(x)\mathrm{d}[g(x)]+\\&f(x)g(x)\cdots \mathrm{d}[h(x)]；\end{aligned}$$
8. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x)\mathrm{d}[f(x)]-f(x)\mathrm{d}[g(x)]}{[g(x)]^2}$；
9. $\mathrm{d}(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$；
10. $\mathrm{d}(\sqrt{x})=\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$；
11. $$\begin{aligned}\mathrm{d}[(ax+x^2)^n]&=n(ax+x^2)^{n-1}\mathrm{d}(ax+x^2)\\&=n(ax+x^2)^{n-1}\cdot(a+2x)\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

第十一卷，介绍高阶微分、麦克劳林级数、泰勒级数、偏微分和全微分。

第十二卷，一阶导数的应用。首先介绍一阶导数的几何意义，其次是求极值问题，给出利用一阶导数、二阶导数、n 阶导数判定极值存在性的定理。

第十三卷，讨论初等超越函数(指数函数、对数函数、三角函数)的微分。给出下列微分公式：

1. $\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$；

2. $\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln a}$，$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$；

3. $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$；

4. $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$；

5. $\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$；

6. $\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$；

7. $\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln a}$；

8. $\mathrm{d}(\log_a \sin x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\tan x\ln a}$；

9. $\mathrm{d}(\log_a \cos x)=-\dfrac{\tan x\mathrm{d}x}{\ln a}$；

10. $\mathrm{d}(\log_a \tan x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x\ln a}$；

11. $\mathrm{d}(\log_a \mathrm{ctan}\, x)=-\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x\ln a}$。

第十四卷，导数的应用。属于微分几何内容，包括求直角坐标系与极坐标系下曲线的切线、法线、次切线、次法线和弧长微分，曲面、旋转曲面的面积微分，旋转体的体积微分，以及求曲线的渐近线。还给出了下列有关切线、法线以及次切线、次法线的公式。

切线长：$\sqrt{y^2+\left(y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}$与$\sqrt{\rho^2+\left(\rho^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}\right)^2}$；

次切线长：$y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$与$\rho^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}$；

法线长：$\sqrt{y^2+\left(y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$与$\sqrt{\rho^2+\left(\rho^2\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}$；

次法线长：$y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$与$\rho^2\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$。

第十五卷，曲率、曲率半径与渐屈线问题。

第十六卷，论一切曲线中诸理。讨论曲线的凹凸性与奇异点，奇异点包括拐点(弯点)、重点(倍点)、歧点、孤点(特点)。

以下卷十七与卷十八为积分学的内容。

第十七卷，论各微分之积分。介绍不定积分的概念和性质以及幂函数与多项式函数的积分法，同时介绍定积分概念、级数展开与积分近似计算，没有有理分式函数的积分法。

第十八卷，定积分的应用。求曲线长、面积与体积，求旋转曲面的面积与旋转体的体积。

在解析几何方面，该书内容仅仅局限于平面解析几何，没有涉及立体解析几何的内容。同时也仅注重几何图形的度量上的代数属性，而缺少空间位置关系方面的几何属性讨论。

微积分的严格化是1856年魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass，1815—1897)算术化工作之后才形成的，此前的微积分方法都缺乏极限这一基础而不严密。该书自然也是如此，偏重并不使用极限工具的微积分计算，不考虑函数的连续性、可导以及级数的收敛性等基础问题，对于定理的逻辑关系的演绎也显得薄弱。该书从整体上看属于莱布尼兹系统，在定积分定义的处理上，却偏重于牛顿的传统，考虑积分与微分的逆运算关系，从微积分基本定理出发给出定义，忽视莱布尼兹的传统而没有考虑其几何积度量方面的定义。《代微积拾级》这种偏重计算的代数倾向，符合中国的算学传统，从而可能是它倍受中国人欢迎的一个重要原因。

第二章 华蘅芳的翻译工作

第一节 翻译工作概况

西方先进的科学技术，是集中代表现代工业化的核心因素，它指向经济生产的实用性质，与清代经世派讲求“实学”、力求学以致用的知识价值观念相吻合。因此，他们首先将其纳入“致用之学”的“实学”范畴而予以接受，科学技术成为中国文化接受西学的突破口。不过，他们在力图更多地了解西方的同时，西方使他们感触最为直接、最为深刻的还是其靠坚船利炮取得对中国的绝对胜利的事实。于是，坚船利炮所代表的西方先进科学技术，吸引着经世派人士的注意。例如，魏源《海国图志》在赞誉蒸汽机的威力时说：“今西方各国，最奇巧有益之事，乃是火蒸水气，舟车所动机关，其势若大风无可挡也。”时任台湾道台的姚莹，参观过英国军舰之后不无感慨地赞叹道：“西洋人推算之密，工匠制作之巧，实逾前古。”他们主张学习西方的科学技术，“师夷长技以制夷”，设厂局以仿造西洋轮船枪炮。

1856年的第二次鸦片战争，特别是清政府对太平天国运动的镇压，促使清朝廷和曾国藩、左宗棠、李鸿章、冯桂芬、王韬、薛福成、郑观应等一些官僚认为，“资夷力以助剿剂运，得纾一时之忧，将来师夷智以制炮制船，尤可期永远之利”，从而使经世致用思潮有了进一步的发展，并付诸实际行动。在他们看来，国家自强以练兵为要，练兵以制器为先，在此原则下，恭亲王奕䜣(1833—1898)、曾国藩等人都主张师法外人，雇佣洋匠造炮制船。于是，从19世纪60年代开始，中国掀起了三十余年的洋务热潮。

1861 年曾国藩创设安庆军械所，命徐寿、华蘅芳等人试造炮船，拉开了洋务运动的序幕。1863 年，容闳受华蘅芳的推介向曾国藩提出建议，应自置机器，设厂以制造机器，不惟可造船炮，亦可造其他器物。与此同时，1862—1863 年李鸿章“用沪平吴”期间，先后在上海和苏州设立上海洋炮局与苏州洋炮局。

1864 年清军攻陷天京后，洋务活动进入比较正规的实行期。1865 年，李鸿章买下美国人在上海的旗记铁厂，并合并丁日昌、韩殿甲主持的上海两个洋炮局，成立江南制造局。同年于南京成立金陵机器局。1867 年崇厚在天津成立天津机器局(后易名北洋机器局)。此外，还有福州船政局、西安机器局、汉阳湖北枪炮厂以及甘、粤、鲁、吉等地的一些洋务工厂。

洋务需要通晓西学以及与西人交涉的外语人才，于是，1862 年 7 月，清政府成立京师同文馆，聘英教士包尔腾(John Shaw Burdon，1826—1907)教授英语，第二年续设法文、俄文两馆。同治五年十二月(1867 年 1 月)，奕䜣、曾国藩、李鸿章、左宗棠、英桂、郭嵩焘、蒋益澧等大员“因思洋人制造机器火器等件，以及行船行军，无一不自天算学中来”，认为“若不从根本上用着实功夫，即习学皮毛，仍无裨于实用”，建议于同文馆添设天文算学馆，“延聘西人在馆教习，务期天文算学均能洞彻根源，斯道成于上，即艺成于下”，延聘美教士丁韪良(W. A. Martin，1827—1916)主持其事。1868 年李善兰被任命为同文馆算学教习，执教凡 13 年。

当时冯桂芬以为，京师同文馆以培养交涉肆应方面的人才为主，而洋务乃国家招携怀远之大政，应为读书明理之人所共能，它不仅有裨益于交涉，而且可以培养端人正士，究习西学、多译西书。鉴于上海、广州为洋人聚集之地，故发议在上海、广州两地增设同文馆。李鸿章根据他的建议奏请朝廷，于同治二年(1863)二月，在上海仿京师同文馆之例增设上海广方言馆，并聘请美教

士林乐知(Young John Allen，1836—1907)为英文教习(1870年，上海广方言馆并入江南制造局)。次年，郭嵩焘在广东巡抚任上建广州广方言馆，以谭顺为英文教习。两馆均设诸科，这样政府创办的同文馆由原来的语言专门学校演变为多专业的综合性新式学堂。同文馆在究习西学的同时，也重视对西学著作的翻译，不过翻译的科技书籍，特别是数学书籍并不多。

由于机器制造上的需要，洋务运动中非常重视对西方科学技术书籍的翻译。华蘅芳、徐寿入江南制造局后不久，"旋请局中冯、沈二总办设一便考西学之法，至能中西艺术相颉颃，因想一法，将西国要书译出，不独自增识见，并可刊印播传，以便国人尽知；又寄信至英国购《泰西大类编》，便于翻译者；又想书成后可在各省设院讲习，使人明此各书，必于国家大有裨益，总办闻此说善之，乃请总督允其小试"。[①]1868年，曾国藩采纳了徐寿的上述建议，在江南制造局设立译书馆以翻译西学书籍，聘请英国传教士傅兰雅(John Fryer，1839—1928)主持，徐寿主译化学、汽机，华蘅芳主译数学、地质。不久又邀请伟烈亚力、金楷理、玛高温(D. J. MacGowan，1814—1893)参与译事，1870年上海广方言馆并入后，该馆教习林乐知也兼事译书。笔述者除傅、徐二人外，还有徐建寅、王德均、李凤苞、贾步纬、赵元益等人。该局成立后12年间，共刊西学著作计98部，235本，尚未刊刻者45部，未译全者13部。

在清政府与封建官僚兴办洋务而引进西学的同时，随着第二次鸦片战争的结束，中国进一步沦为西方列强的半殖民地，西方传教士在华势力也日益强大。为了扩大教会的影响，他们在中国创办编译出版图书的书馆。1860年姜别利(William Gamble，? —1886)在上海成立美华书馆，从事宗教和科技书籍的编译出版。

---

① 傅兰雅.《江南制造总局翻译西书事略》

1887年，英教士韦廉臣、李提摩太(Timothy Richard，1845—1919)于上海创立“广学会”(后易名同文书会，Chinese Book and Tract Society)，成为当时中国最大的图书出版机构，超过官方出版机构同文馆与江南制造局。狄考文(Calvin W. Mateer，1836—1908)主持山东登州文会馆，傅兰雅主持上海格致书院(1874)，林乐知主持上海中西书院(1882)，均兼事编译西方科技图书。为了使传教士披上合法的外衣，教会又采取办学方式来传教。他们教一些中国人学英语，以培养教会和洋行所需要的翻译与买办，从而晚清教会学校迅速发展。至1853年，中国各教区内共有78所学校，1200余名学生。1875年前后，发展到约800所，学生约20000人。至1899年竟增至2000所，学生多达40000人。在建立学校活动中，美国教士最为积极。据统计，到1898年为止，美国传教士在中国已拥有初等学校1032所，学生16310人，中等以上学校74所，学生3819人。[①]由于教会学校的增多，1877年，在华新教教士举行大会，决定设立益智书会(School and Textbook Series Committee)，扩大编撰各种教科书的工作，以供高等小学及中学之需，并由丁韪良、韦廉臣、狄考文、林乐知、傅兰雅、利启勒(R. Lechler)等人主持，13年间共出版教材98种。19世纪60年代至90年代，外国传教士与中国学者翻译介绍的西学书籍达千余种。其中教会系统的数学教科书有[②]：

一、基督教士所编译课本

1.《心算初学》6卷，登州哈师娘撰；

2.《心算启蒙》十五章1卷，美国那夏礼辑译，1886上海美华书馆出版；

---

① 陈景磐．中国近代教育史．北京：人民教育出版社，1986．65

② 李俨．中国数学大纲．见：李俨、钱宝琮科学史全集．第三卷．沈阳：辽宁教育出版社，1998．601

3.《西算启蒙》，1885年；

4.《数学启蒙》2卷，伟烈亚力撰，1853年；

5.《笔算数学》三册，狄考文、邹立文同撰，1892年；

6.《代数备旨》13卷，狄考文撰，邹立文、生福维译，1896年上海美华书馆；

7.《代数备旨》下卷11章，狄考文撰，范震亚校，1902年会文编辑社；

8.《形学备旨》10卷，狄考文撰，邹立文、刘永锡译，1885年，上海美华书馆；

9.《八线备旨》4卷，罗密士撰，谢洪赉、潘慎文同译，1894；

10.《代形合参》3卷附1卷，罗密士撰，潘慎文选译，1893；

11.《圆锥曲线》，罗密士撰，求德生(J. H. Judson)口译，刘维师笔述，1893；

12.《格致须知》，傅兰雅辑，含以下数学书（1887～1888）：

(1)《量法须知》

(2)《三角须知》

(3)《代数须知》

(4)《微积须知》

(5)《曲线须知》

二、天主教士所编译课本

1.《课算指南》，天主教启蒙学校用书；

2.《课算指南教授法》，天主教启蒙学校用书；

3.《数学问答》，佘宾王(P. F. Scherer, S. J.)，1901；

4.《量法问答》，佘宾王撰，1901；

5.《代数问答》，佘宾王撰，1903；

6.《代数学》，Carlo Bourlet撰，陆翔译，1928；

7.《几何学》，Carlo Bourlet撰，戴连江译，1913。

在晚清翻译西学活动中，傅兰雅与华蘅芳(1833—1902)是继

伟烈亚力与李善兰之后最有成就的两位合作者，对于近代西方数学知识的进一步引进，起了十分重要的作用。

傅兰雅，英国教士，1861 年受英国圣公会派遣赴香港任圣保罗书院院长，1868 年与该会脱离关系，同年前往北京，并应江南制造局之聘而入该局译书馆从事翻译工作，直至 1896 年回国，旋即移居美国。在华期间，他与中国学者翻译的西方科技书籍达 230 余种，内容包括数学、天文学、物理学、化学与化工、地理学与地方志、生物与农学、医药卫生、矿业与冶金、工程技术、测绘、军事与政法等各学科，其中数学类计有以下 23 种[①]：

《代数术》25 卷，(英)华里司(John Wallis，1616—1703)撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1873；

《微积溯源》8 卷，(英)华里司撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1874；

《三角数理》12 卷，(英)海麻士(J. Hymers，1803—1877)辑，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1877；

《代数难题解法》16 卷，(英)伦德(Thomas Lund)撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1879；

《决疑数学》10 卷，(英)棣麼甘(Augustus De Morgan，1806～1871)撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1880；

《合数术》11 卷，(英)白尔尼(Olive Byrne)撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1887，未刊；

《代数总法》4 本，(英)华里司撰，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，未刊；

《代数菁华录》16 卷，傅兰雅口译，华蘅芳笔述，1897；

《算式解法》14 卷，(英)好敦司、奈开利撰，傅兰雅口译，华

① 李迪. 中国科学技术史论文集. 第一集. 呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991. 153

蘅芳笔述，1899；

《运规约指》3 卷，(英)白起德辑，傅兰雅口译，徐寿笔述；

《周幂知裁》1 卷，(美)布伦撰，傅兰雅口译，徐寿笔述；

《器象显真》4 卷，(英)白力盖辑，傅兰雅口译，徐建寅删述；

《算式集要》4 卷，(英)哈司韦辑，傅兰雅口译，江衡笔述；

《数学理》9 卷附 1 卷，(英)棣麼甘撰，傅兰雅口译，赵元益笔述；

《曲线须知》1 卷，傅兰雅著(1888)；

《量法须知》1 卷，傅兰雅著(1888)；

《代数须知》1 卷，傅兰雅著(1888)；

《微积须知》1 卷，傅兰雅著(1888)；

《画器须知》1 卷，傅兰雅著(1888)；

《算器图说》1 卷，傅兰雅辑(1888)；

《新式算器图说》1 卷，傅兰雅辑。

华蘅芳(1833—1902)，字若汀，金匮(今江苏无锡)人。七岁始读，十四岁学《算法统宗》而对数学产生兴趣，“十五六岁时，偶于故书中检得坊本算法，心窃喜之，日夕展玩，不数月而尽通其义”。[①]并自学中国古代算经十书，继读秦九韶、梅文鼎、焦循、李锐、骆腾凤、罗士琳、董祐诚诸家著作及《数理精蕴》，学业大进。年轻时游学上海，结识当时数学名家李善兰，从而开始学习西方近代数学著作《代微积拾级》与《代数学》。1861 年为曾国藩擢用，与同乡徐寿同往安庆曾国藩军中，佐理洋务新政。1863 年曾国藩保奏华氏以县丞选用。太平天国天京陷落后，华蘅芳曾被保奏“以知县选用，并加花翎同知衔”。1865 年，曾国藩、李鸿章合奏于上海设立江南制造局，华氏即往上海筹备设局事宜。1868 年，制造局添设翻译馆，华氏于馆中与傅兰雅、玛高温等人合作

① 华蘅芳．学算笔谈．卷五．光绪八年刊本

以翻译西方科技书籍。1873年前后，任江南制造局“提调”，后又任天津机器局“提调”。华氏居沪三四十年，译书二十年，共刊行十二种，一百七十卷。1876年在英国领事麦华陀及傅兰雅、伟烈亚力、唐景星、徐寿等人的策划与资助下，于上海建立格致书院，华蘅芳担任教习。1886年赴天津任武备学堂教习，1892年赴武昌任两湖书院教习，1896年任常州龙城书院院长兼江阴南菁书院院长。自著汇刻为《行素轩算稿》六种二十七卷。另有《算法须知》一卷、《西算初阶》一卷。

华蘅芳与傅兰雅合作翻译的科技书籍除前述九种外尚有：

《相等算式理解》，未刊；

《配数算法》，未刊；

《风雨表法》，未刊；

《海用水雷法》，未刊。

与美国玛高温合译的地学和海防著作有：

美国代那(James Dwight Dana，1813—1895)的《金石识别》12卷；

英国雷侠儿(Lyell)的《地学浅释》38卷；

比利时希里哈的《防海新论》18卷。

与美国金楷理(C. T. Kreyer)合译的著作有：

英国白尔特的《御风要术》3卷及《测候丛谈》4卷。

第二节　《决疑数学》介绍

《决疑数学》，是一本系统的古典概率论专著。“决疑”是Probability的译语，今译作“概率”。光绪六年（1880）七月的《格致汇编》称“傅兰雅、华蘅芳同译，已译未刻各书有《决疑数学》，棣麼甘撰，四本”。可知于1880年7月前译出，现传光绪二十二年(1896)尧城周氏刊本等版本。

全书由一个“总引”和十卷，计160款构成，都是古典概率论问题。

“总引”概叙概率论所研究的对象与发展史，叙及它在赌博、占卜、人口统计、人寿产业保险、法律诉讼等方面的应用。关于概率论发展史，介绍了帕斯卡(巴斯果，Blaise Pascal，1623—1662)、费尔马(勿马，P. Fermat，1601？—1665)、惠更斯(晦正士，Cchristian Huygens，1629—1695)、蒙特默特(孟德默得，Montmort，1678—1719)、摩德、雅可比贝努利(北奴里，James Bernoulli，1654—1705)、丹尼尔贝努利(但尼里，大尔尼，Daniel Bernoulli，1700—1782)、棣美弗(A. De Moivre，1667—1754)、斯特林(斯忒林，James Stirling，1692—1770)、欧拉(尤拉阑，Euler，1707—1783)、阑迫(Lambert，1728—1777)、卑固韦林(Beguelin)、达朗贝尔(德阑孛得，Jean le Roud D'alembert，1717—1783)、贝叶斯(卑斯，Thomas Bayes，1702—1761)、黑突(Van Hudde，1628—1704)、棣韦德(John de Witt，1625—1672)、堪都昔(Marquis de Candorcet，1743—1794)、布韦森(泊松，S. D. Poisson. 1781—1840)、拉格朗日(拉果兰诸，J. L. Lagrange，1736—1813)、勒让得(勒占德，A. M. Legendre，1752—1833)、拉普拉斯(拉不拉斯，P. S. Marquis de Laplace，1749—1827)、高斯(哥斯，K. F. Guass，1777—1855)、拉固罗瓦(Lacroix，1765—1843)、多德森等人在概率方面的工作，以及西方流行的概率论著作。关于概率论的教材与入门书，在“总引”中，特别推崇棣麼甘的著作，称此书载于伦敦丛书(1834)，实指棣麼甘的著作 *An Essay on Probabilities, and on Their Application to Life Contingencies and Insurance Offices*(1839)。[①] 在概率论的历史叙述中，介绍了点数问题、分赌

① 严敦杰．跋《决疑数学》十卷．见：明清数学史论文集．南京：江苏教育出版社，1990，421

本问题、投针问题、哥尼斯堡赌法问题等著名古典概率问题。

卷一，“论决疑数之例”。计 10 款，介绍概率基本概念，主要是关于随机事件及其概率的意义，以及独立事件的和事件、积事件的概率运算问题。给出了拉普拉斯的概率古典定义：$P(A)=\frac{k}{n}$（n 为基本事件的总数，k 为事件 A 发生的次数）。

关于概率的性质有以下几款：

1. 第五款：$P(A)\leq 1$，$P(A)+(\overline{A})=1$；

2. 第六款：对于两两互不相容的完全事件组 $\{A_k\}$，有 $P\left(\sum_k A_k\right)=\sum_k P(A_k)=1$；

3. 第七款：对于独立事件的积（丛事），有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$；

4. 第九款：对于互不相容的事件 A_k，有 $P\left(\sum_k A_k\right)=\sum_k P(A_k)$。

卷二，讨论还原取样试验的二项分布的概率。给出了贝努利公式：

$$\frac{\text{一、二、三}\cdots\text{卯}}{\text{辛}(\text{辛}\top\text{一})(\text{辛}\top\text{二})\cdots(\text{辛}\top\text{卯}\perp\text{一})}\text{巳}^{\text{辛}\top\text{卯}}\text{午}^{\text{卯}}$$

即 $$b(k;n,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^k p^k q^{n-k}。$$

同时将二项概率推广到多项概率，即对于相互独立完全事件组 $\{A_i\}$，$P(A_i)=p_i$，$\sum_{i=1}^{s} p_i=1$，那么 n 次试验中，事件 A_i 出现 k_i 次的概率为

$$(p_1+p_2+\cdots+p_s)^n=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_s=n}\frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \cdots k_s!}{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_s}^{k_s}$$

中含 ${p_i}^{k_i}$ 的项。

卷三，计五款，讨论非还原取样试验的概率问题。着重讨论了超几何概率，即设共有 N 个元素，其中 M 个元素具有特征 A，现从中非还原地随机取 n 个（$n\leq N$），则恰好取到 k 个具有特征 A

的元素的概率为：

$$h(k;n,N,M)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^k}。$$

卷四，论关景决疑数与不关景决疑数，即数学期望问题。它是由惠更斯在研究如何分配赌注时而最早提出的一个数学概念。该卷第三十一款给出了数学期望的惠更斯古典定义："将所欲得之利与其所凭籍之事的决疑率相乘所得之积"，该书译做指望，或指望决疑率。并且进一步将数学期望分关景决疑数与不关景决疑数两类。若某人持有本钱 Q，得利 a 的概率为 p，则 ap 为所谓的不关景决疑数；$\frac{a}{Q}p$ 即所谓的关景决疑数。其差别在于随机变量的不同选择，刻画了在赌局中，数学期望与所拥有的赌金有关，最初是丹尼尔·贝努利与满德未得(P. R. Montmort)在俄国彼得堡所研究的一种问题，载于《彼得堡博物会记录》。现代概率论已不再使用关景与不关景的概念，其在数学上的差别并不大，仅是随机变数的取值不同而已。

该卷第三十二款证明了赌博对局两人的数学期望相等这一命题，即：

若 A，B 两人所下赌注分别为 a，b，各自获胜的概率为 p，q，所夺之彩为 $s=a+b$，有 $ps:qs=a:b$，故 $bp=aq$。

三十四款介绍丹尼尔·贝努利的数学期望问题：对于本钱变量 x，赢的概率 c 来说，其关景数学期望 $y=\int c\frac{\mathrm{d}x}{x}=c\ln\frac{x}{a}$。

随后利用这一结果证明了贝努利关景数学期望命题：

对于本钱 a，利 α，β，γ，…，得利概率 p，q，r，…，且 $p+q+r+\cdots=1$，若 $\frac{\alpha}{a}$，$\frac{\beta}{a}$，$\frac{\gamma}{a}$，…都很小，则其关景数学期望与不关景数学期望之差可以忽略不计。

卷五，"论从试验之事推算未来之事之决疑率"，即古典型条

件概率问题。给出了全概率公式：$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$。

卷六，关于人寿保险的概率应用问题。

卷七，关于概率在法律诉讼方面的应用问题。

卷八，“论关乎极大之数各题之解法”，讨论概率最大值问题与大数定理。证明了二项分布的最大值定理：

对于二项概率 $b(k;n,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，

(1) 若 $(n+1)p=m_0$ 为整数，则 m_0 与 m_0-1 都是 $b(k;n,p)$ 的最可能数，即 $b(m_0;n,p)$ 与 $b(m_0-1;n,p)$ 都是 $b(k;n,p)$ 的最大值，并且当 $k\leq m_0-1$ 时，$b(k;n,p)$ 随 k 增大而递增，当 $k\geq m_0$ 时，$b(k;n,p)$ 随 k 增大而递减。

(2) 若 $(n+1)p=m$ 不是整数，则 $[(n+1)p]=[m]=m_0$ 是 $b(k;n,p)$ 的最可能数，即 $b(m_0;n,p)$ 是 $b(k;n,p)$ 的最大值，并且当 $k\leq m_0$ 时，$b(k;n,p)$ 随 k 增大而递增，$k\geq m_0$ 时，$b(k;n,p)$ 随 k 增大而递减。

在该卷的第八十九、九十款还利用组合论中的斯特林公式

一二三…天＝天^{天}戊$^{\text{T}天}\sqrt{二周天}$　（即 $n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$）

讨论多项分布 $(p_1+p_2+\cdots+p_s)^n$ 的概率最大值问题。

卷九，介绍随机变量及其分布函数问题。首先在第 112 款讨论均匀分布：

$$P(x=\sum_{i=1}^{h}x_i=s)=\frac{1}{\beta-\alpha+1}。$$

这里 $p(x_i)=p$，$a\leq x\leq b$，$a=a\varepsilon$，$b=\beta\varepsilon$，$s=\lambda\varepsilon$，$x=i\varepsilon$，$x_i-x_{i-1}=\varepsilon$，$h=\beta-\alpha+1$。

并将其推广为广义二项分布情形。

从第 113 款到第 121 款，证明了我们今天所谓的棣莫弗-拉普拉斯积分极限定理：若 x 服从二项分布 $b(x;n,p)$，则当 n 充分大时，$np(1-p)$ 也充分大，x 渐近地服从正态分布 $N(np,n(1-p))$。

雅可比贝努利获得大数定律：$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\eta_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=0$ 之后，1716 年棣美弗用斯特林公式证明了 $p=\frac{1}{2}$时，$\frac{(\eta_n-np)}{\sqrt{np(1-p)}}$渐近地服从正态分布。棣美弗的结果被拉普拉斯推广为一般情形。《决疑数学》认为，拉普拉斯书中的推导方法不够简便，所以采用蒲丰的证明方法，得出分布函数

$$P(hk-\delta\leq\sum_{i=1}^{h}x_i\leq hk+\delta)=Q=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\iota^2}\sin\frac{\delta\iota}{\sqrt{hc}}\cdot\frac{\mathrm{d}\iota}{\iota},$$

并化为

$$Q=\frac{2}{\pi}\int_0^{v}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t,$$

其中 $v=\frac{\delta}{2\sqrt{hc}}$，$k-2v\sqrt{\frac{c}{h}}\leq\frac{\sum\limits_{i=1}^{h}x_i}{h}=\frac{s}{h}\leq k+2v\sqrt{\frac{c}{h}}$。

同时给出正态分布的密度函数（第 132 款）：

$$\text{函}=\sqrt{(\text{室}\div\text{周})}\,\text{戊}^{\text{丅室方}},\qquad \text{即}\quad f(\Delta)=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\mathrm{e}^{-\lambda\Delta^2},$$

并讨论了正态曲线的性质。

在第 119 款，讨论了对于概率函数 $f_n(x)$的子样阶距与子样方差均值问题，给出以下系列公式。

各子样阶距为：

$$K_n=\int_a^b xf_n(x)\mathrm{d}x,\ K'_n=\int_a^b x^2f_n(x)\mathrm{d}x,\ K''_n=\int_a^b x^3f_n(x)\mathrm{d}x,\ \cdots$$

子样方差：$C_n=\frac{1}{2}(K'_n-K_n^2)$；

算学中数：$K=\frac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m}k_n$；

均值：$C=\frac{1}{2}(K'-K^2)=\frac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m}C_n$。

卷十，论极小平方法及其应用。对于通过观测建立的线性模

型：

$$U_i=b_i+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j,\ (i=1,2,3,\cdots,n)$$

需要求 x_i，使 U_i “以其全看之次而论之为所能有之至少者”，亦即使 $\sum_{i=1}^{n}U_i^2$ “为一定极小之数”。该书给出的是高斯方法：

$$令\ \delta_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\left(b_i+\sum_{i}^{m}a_{ij}x_j\right),\ (j=1,2,3,\cdots,m)$$

$$x_j=A_j+\sum_{k=1}^{m}P_{jk}\delta_j,\ (j=1,2,3,\cdots,m)$$

则当取 A_j 作为 x_i 的近似值时，$\sum_{i=1}^{n}U_i^2$最小。

卷末还附有标准正态概率积分公式：

$$\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^v e^{-t^2}dt=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_v^{\infty}e^{-t^2}dt,$$

并附以 $v=3$ 和 $v=0$ 为积分上下限的积分数值表，其采自于比利时天文年历（布国天文通书）。

傅兰雅与华蘅芳合译的《代数难题解法》中已有概率论的知识，它是西方概率论知识第一次传入中国，但是其内容并不系统全面。《决疑数学》包括了概率论学科中的最基本、最具代表性的内容，因此是一部开始在中国传播的系统而全面的概率论著作。有人认为，其内容主要是拉普拉斯《概率的分析理论》(1812)中的基本内容，并且参考了高斯、孟德默得等人的著作。[①] 拉普拉斯的《概率的分析理论》将古典概率论的组合计算法发展到分析方法的新层次，与西方的微积分学相比，算得上是较为新近的高等数学内容，不过《决疑数学》没有介绍西方概率论在推广与改进贝努

① 郭世荣. 西方传入我国的第一部概率论专著——《决疑数学》. 中国科技史料，1989，10(2)：95

利大数定律和棣莫弗-拉普拉斯极限定理方面的最新成果，可能是傅兰雅等传教士还没有了解当时概率研究的最新动态。该书最显著的特点是强调概率论的实际应用，以及注重推理论证，书中所有公式都给出推演过程。它不仅使中国学术界了解了概率论这一新的数学分支，而且也随之传入一些新的近代数学内容，如斯特林公式、二重积分、无穷积分、欧拉定理等。

第三节 其他译著介绍

1853 至 1911 年间，翻译的西学书籍达千余种，科技书籍近 500 部，而数学占三分之一。在这些翻译的西方近代数学著作当中，除第一次引进高等数学的《代微积拾级》与《决疑数学》外，还有其他一些有关高等数学的书籍，如《微积溯源》、《代形合参》、《微积须积》、《合数术》、《奈端数理》等。另外还有一些代数学、几何学、三角学等初等数学的著作，如《代数学》、《代数术》、《三角数理》、《圆锥曲线》等。在这些译著当中，以《代数术》、《微积溯源》、《代形合参》、《圆锥曲线》、《三角数理》等书传播较广，影响显著。现摘要者介绍如下：

一、《代数学》

该书由伟烈亚力口译、李善兰笔述而成，于 1859 年由墨海书局出版。该书由一个卷首总纲及十三卷内容构成：

卷一，论一次方程。关于一次方程的概念。

卷二，论代数与数学记号之不同。说明代数符号的意义与作用。

卷三，论多元一次方程组。关于线性方程组及其解问题。

卷四，论指数及代数式渐变之理。讨论指数函数与代数式的运算性质。

卷五，论一次二次式之义，及二次方程之数学解。讨论一元

二次方程的解，包括其与一次方程的关系、根的判别式、求根公式、根与系数的关系。

卷六，论限及变数。介绍变量及其极限的概念。

卷七，论代数式之诸类并约法。关于代数式的概念及其运算问题。

卷八，论级数及未定之代数。讨论级数问题。

卷九，论代数与数学之相等不等。说明代数等式的意义与性质。

卷十，论记函数法。函数概念与表示法。

卷十一，论合名法。介绍二项式定理，包括数学归纳法的证明。

卷十二，论指数对数之级数。讨论指数函数与对数函数的级数展开式。

卷十三，论用对数为算术之捷法。介绍利用对数作简便计算。

该书是我国第一部符号代数学读本，论述初等代数的教材，内容主要是多项式理论、一元二次方程理论以及指数函数、对数函数的幂级数展开式问题，其中还介绍了二项式定理、虚数等，这些内容都是首次传入中国的，该书译笔不若《代数术》通顺易读。

二、《代数术》

该书为初等代数教材，共二十五卷，译自英国数学家 John Wallis 的代数教材 *Algebra*，傅兰雅口译、华蘅芳笔述，“一日数千言，不厌其艰苦，凡两月而脱稿，缮写付梓，经年告成”[①]，于 1873 年由江南制造局出版。目录及其内容如下：

卷首，“释号”，叙代数符号的规定与使用规则，以及多项式的一些基本概念。沿用李善兰《代数学》的代数符号。

前九卷论代数多项式、一次方程与二次方程。其中：

① 华蘅芳．代数术．序．江南制造局刊本

卷一，“论代数起首之法”，讨论代数式的四则运算规则。

卷二，“论代数诸分之法”，介绍有理分式的四则运算。

卷三，“论代数之诸乘方”，介绍指数概念、代数式的乘方与开方运算，包括二项式定理与根式概念。

卷四，“论无理之根式”，讨论根式的代数运算。

卷五，“论代数之比例”，讨论等差数列与等比数列概念及其求和运算。

卷六，“论变清独元之一次方程式”，关于一元方程的分类与方程同解变换。

卷七，“多元一次方程式解法”，介绍多元一次方程组的解法，包括代入消元法与加减消元法。

卷八，“解一次式各题”，关于一次方程的应用题。

卷九，“二次式解法”，讨论一元二次方程的解法，包括配方法、因式分解法、求根公式法。

从第十卷至第十二论三次、四次方程解法：

卷十，“总论各次式”，介绍多项式方程理论，包括多项式整除性、代数基本定理、笛卡儿符号法则、虚根的共轭性等。

卷十一，“论三次式之解法”，讨论一元三次方程解法，包括卡尔丹(迦但,G. Cardano,1501—1576)的解法。

卷十二，“论四次式之解法”，讨论一元四次方程解法，主要是四次方程的欧拉(尤拉)解法，其中论及四次以上方程求解无通法。

卷十三，“论等职各次式之解法”，介绍用换元法解特殊的高次方程。

卷十四，“论等根各次式之解法”，关于存在等根的方程解法。

卷十五，“论有实根之各次式解法”，确定代数方程有理根的方法。

卷十六，“论求略近之根数”，介绍用牛顿-拉格朗日叠代法求

方程近似解。

卷十七，“论无穷之级数”，介绍代数式的无穷幂级数展开法。

卷十八，“论对数与指数式”，介绍对数的概念与运算性质，以及指数方程求解法与对数的级数展开。

卷十九，“论生息计利”，叙以对数解复利问题。

卷二十，“论连分数”，介绍实数的连分数渐近展开。

卷二十一，“论未定之相等式”，关于求不定方程整数解问题，介绍一次不定方程的库塔卡解法与二次不定方程的勾股整数问题。

卷二十二，“论用代数以解几何之题”，关于列代数方程解几何题问题。

卷二十三，“论方程式之界线”，介绍方程与平面曲线的关系。

卷二十四，“论八线数理”，介绍平面三角知识，以及三角函数的幂级数展开。

卷二十五，“论八线数理”，介绍三角学中的棣莫弗定理、牛顿-丹尼尔贝努利三角级数与欧拉级数。

与《代数学》相比，《代数术》的内容更为丰富，水平也较高，包含今天我们中学所学的所有代数学知识，甚至无穷级数等简单的高等数学内容。

三、《微积溯源》

该书共八卷，由傅兰雅、华蘅芳译自英国数学家 John Wallis 的微积分教材 *Fluxions*，同治十三年(1874)江南制造局刊印。关于译此书的动机，华蘅芳在《微积溯源》的序言中说得十分清楚：“余既与西士傅兰雅译毕《代数术》二十五卷，更思求其进境，故又与傅君译此书焉。先是咸丰年间，曾有海宁李壬叔与西士伟烈亚力译出《代微积拾级》一书，流播海内，余素与壬叔相友，得读其书，粗明微积二术之梗概，所以又译此书者，盖欲补其所略也。”旨在弥补《代微积拾级》之不足。其目录如下。

“卷一：

论变数与函数之变比例

论各种函数求微分之公法

求两函数相乘积之未微分

求多函数连乘积之微分

求变数之分函数微分

求变数诸乘方之微分

求重函数之微积分

求多项函数之微分

代函数求微分各题

求二项例之证

越函数微分

圜函数微分

繁函数求微分诸题

卷二：

叠求微系数

论戴劳所设之例

论马格老临之例

论戴氏之术所不能驭之题

求双变数微分

求隐分之数

卷三：

求函数极大极小之数

求曲线之切线式

论极曲线之切线法线公式

论曲线之渐近线

求曲线界内之面积微分并曲线之微分

论渐伸之曲线

卷四：

论曲线相切

求两个变数之叠微分

改其自主之变数

论无穷小数之理

卷五：

论反流数

论独变之函数

求实函数微分式之积分

卷六：

求虚函数微分式之积分

求二项微分式之积分

以级数求积分法

求对函数微分式之积分

求指函数微分式之积分

求圆函数角函数微分式之积分

卷七：

求曲线之面积

求曲线之长

求曲线所成之体积

求曲线之皮积

求与拗捩线等长之直线

卷八：

求双变数微分之积分

求第二类以上微分之积分

附最深几何题”

《微积溯源》的内容要比《代微积拾级》丰富得多，此书基本属于牛顿系统。卷一为一元函数的导数与微分；卷二内容包括高

阶微分、Taylor 级数与 Maclaurin 级数以及偏微分；卷三、卷四包括今日所谓的微分几何的内容，卷三含有求函数极值问题、求曲线的切线、法线、渐近线、渐伸线问题以及求曲线弧长问题，属于导数的几何应用；卷四论曲线相切问题以及有关高阶微分和无穷小的内容；卷五、卷六属于不定积分的内容；卷七是定积分及其在几何方面的应用；卷八“求双变数微分之积分”即常微分方程求解问题，主要是一、二阶微分方程及贝努利方程，介绍了分离变量法。卷八之末的“輭腰线”即今之悬链线，属于变分法的简单例子。

四、《合数术》

该书由傅兰雅与华蘅芳共同翻译，译自英国人 Olive Byrne，*Dual Arithmetic*，1863. 此书并未刊刻，有稿本传世，计五册，十一卷。[①]

“此书所论之理，谓之合数，乃算学中一种新术，并非将旧术所能推之事，更立新法也”，“此种算学能推广真数之作用，扩充算学之界限，又能设立新法，使甚难而大有用之题易推，可免用表及其繁之式，并不足凭之略法。”它实际是一种高位近似计算法。

该书内容如下：

卷首“总引”叙“合数”定义、各种记号，以及合数与常数的互换，并给出六种互换表。所谓“合数”，即对于实数 N 与 a_i，($i=0$，1，2，…)有

$$N=a_0\left(1+\frac{1}{10}\right)^{a_1}\left(1+\frac{1}{10^2}\right)^{a_2}\left(1+\frac{1}{10^3}\right)^{a_3}\cdots$$

若简记 $N=a_0\downarrow a_1，a_2，a_3，a_4，\cdots$，则称 a_i 为 N 的合数。

① 纪志刚. 稿本《合数术》研究. 见：数学史研究文集，第一辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，1990. 168. 又见：王扬宗. 晚清科学译著杂考. 中国科技史料，1994，15(4)

如 3.1415927＝↓12，0，1，0，0，8，2，3＝↓12，0，0，10，6，16，18＝…

卷 1～3，论述合数的基本代数运算。

卷 4～6，合数在平面三角、球面三角中的应用。

卷 7～9，关于合数在各种代数方程求解中的应用。

卷 10 为杂题，内容涉及代数、方程、三角测量、椭圆积分、球面三角以及物理学问题用合数术求解。

卷 11，论合数开方术，讨论代数方程求解问题。

合数术本身并非高深的数学方法，但在《合数术》一书中，作者利用合数术这一近似计算技巧，解决一些高等数学的问题，如求正态分布函数的积分方程

$$P(x)=\int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}=0$$

的近似解，以及平衡过程的功率、单摆运动的时间等。[①]

五、《三角数理》

该书共 12 卷，傅兰雅、华蘅芳译自英国 J. Hymers，*A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*，1863. 1877 年江南制造局刊刻出版。卷一，“论三角法中用比例数之理”，介绍三角函数的定义与基本公式；卷二，“论两角或多角之各比例数”，为两角和公式；卷三，“论造三角比例表之法”，给出三角函数与对数三角函数造表法；卷四，“论平三角形之各种解法”，内容包括平面三角形及多边形的解法，高远法、佛逆原理与酒准定平法等测量法，以及测量仪器哈德里纪限仪与更达带尺的介绍；卷五，“论各角之比例数乘约变化之理”，纪棣莫弗创例，反三角函数；卷六，“论对数”，介绍对数概念及性质、指数函数和对数函数的幂级数展开

① 纪志刚. 稿本《合数术》研究. 见：数学史研究文集，第一辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，1990. 162

式以及三角函数的对数计算；卷七，关于三角函数公式的应用，计49题；卷八是51道解平面三角形的应用题；卷九至卷十二属于球面三角的内容；卷九介绍球面三角形的基本概念；卷十解球面直角三角形；卷十一球面斜三角形及多等面形；卷十二设球面三角形求解题27道。这是一部系统的三角学著作。

六、《器象显真》

画法几何著作，共四卷，附图一卷，徐建寅、傅兰雅同译，译自英国人白力盖所编写的著作，1873年由江南制造局出版。早在18世纪，法国传教士就将西方的透视学制图方法传入中国，在其影响下中国学者年希尧(？—1738)撰著《视学》一书。西方透视制图学第二次传入中国即《器象显真》一书，该书是一部系统的画法几何与机械制图著作。第一卷介绍作图工具，包括器具的构造、用法及注意事项；第二卷介绍平面图形的画法，以及一些曲线的近似画法；第三卷论透视图，包括投影原理、三视图、相贯体的视图；第四卷讨论机械制图，包括带用零件图、蒸汽机的分图与总图以及草图。

七、《奈端数理》

此书卷数不详，共四册，1859年由伟烈亚力、傅兰雅口译，李善兰笔述，译自牛顿的《自然哲学的数学原理》(*Mathematical Principles of Natural Philosophy and his system of the world*, 1729)，未译完，只译至第四章的圆、椭圆部分，椭圆以下抛物线、双曲线以及其他各章不及译出。已译的部分也没有加以删润，多为长句，加之书本身内容深奥，所以译出来的书稿更十分难读。华蘅芳几次欲加以删改，终未果。此书也未刊刻，书稿后为大同书局借失，现不可寻得。①

① 韩琦.《数理格致》的发现. 中国科技史料，1998，19(2)

第三章　西方近代高等数学在中国的影响

《代微积拾级》与《决疑数学》等书的译出，标志着中国人开始接触国际性的数学问题，是中国数学近代化的第一步，尽管与当时的西方数学还有很大的距离。

中国数学近代化首先反映在由《代微积拾级》、《微积溯源》、《决疑数学》等书所载的高等数学知识在中国的传播与研究，其次是中国数学界开始逐渐接受西方数学的代数化方式，以及数学术语的规范化。

第一节　西方近代高等数学在中国的影响

《代数学》、《代微积拾级》等书出版以后，西方近代数学知识在中国迅速广为传播。首先在同文馆、新式学堂与各地书院的数学教育中普遍开设西学课程。就内容来说，主要是微积分、代数学、几何和三角，概率论知识在中国的传播十分有限，而微积分学的影响较为显著，如 1867 年福州船厂法文学堂即有微积分课程。1876 年北京同文馆丁韪良所定八年制课程表规定：第四年为数学启蒙、代数学；第五年修几何原本、平三角、弧三角；第六年则修微分与积分。在其五年制课程中，第一年为数理启蒙、九章算法、代数学；第二年为四元解、几何原本、平三角、弧三角；第四年为微积分课程。它们的微积分课程教材都是《代微积拾级》。

这一时期，上海中西书院（1897 年林乐知创建）、湖北两湖书院、湖南时务学堂、湖南湘乡东山精舍、绍兴中西学堂算学馆、衡

州西湖精舍、常宁求是书院、长沙湘学使署、长沙求是书院、湖北自强学堂等都有微积分课程教学。①

由于是翻译著作，而且与中国传统数学具有不同知识体系，所以对于晚清初学西方微积分、代数及几何的中国人来说，往往感到困难，故不乏有人对其诠释、重加演证。如梁启超所言："李叔壬初译代数学已佚，其存者《代微积拾级》一依西人文法，不敢稍有变动，故极佶屈难读，冯林一尝以己意重演之，为《西算新法直解》，然不能善也。"②这期间，除冯桂芬与陈暘撰写的《西算新法直解》外，还有以下中国学者编写的微积分学习辅助参考书：

华蘅芳　《微积初津》
蒋士栋　《微积释马》(1897)
林传甲　《微积集证》(1900)
徐　异　《积分难题》(1901)
凌步芳　《积分详说》
陈志坚　《微积阐详》(1905)
杜魁云　《微积集证》
黄启明　《微积通诠》(1905)
周　藩　《代微积拾级详草》(1905)
王　世　《微积学答问》(1907)
瞿方梅　《积分法浅释》
卢　靖　《代微积拾级补草》(未刻)
　　　　《微积溯源补草》(未刻)
　　　　《叠微分补草》(1902，稿本)

① 汪晓勤．伟烈亚力与中西数学交流．中科院自然科学史研究所博士论文，1999．104

② 梁启超．读西学书法．见：中西学门径书七种．光绪二十四年(1898)上海大同译书局石印本

王达鲁　《微积新理》(惜分阴斋编印本)
杜亚泉　《微积问答》
佚　名　《微积互求表》(正学堂印本)
罗密士　《微积学》(刘光照译,1905)

中国数学家掌握西方微积分后，也开始将其应用于数学研究之中，如夏鸾翔(1823—1864)“最究心于曲线之术，读《拾级》后，所造益深”,[①]撰《致曲术图解》与《万象一原》，在《代微积拾级》基础上获得诸多积分方面的新成果，如计算旋转椭球体体积、表面积以及球冠积。

概率论在晚清的影响不及微积分译著那么迅速和广泛。华蘅芳、傅兰雅译出《决疑数学》后，没有立即刊行，直至光绪二十二年(1896)才由周学熙首次刊刻出版，但此次刊刻也“印行无几，流布甚稀”。[②]光绪二十三年(1897)傅兰雅于格致书室再行铅印，同年又有上海飞鸿阁石印本问世，至宣统元年(1909)，又有周达的扬州校刻本。晚清至民国初，也有一些书院和学堂使用《决疑数学》作为教科书，[③]但研究概率论者并不多见，唯周达证明过斯特林公式。

微积分、概率论与代数学在晚清中国的传播，为中国数学的现代化做了一定的准备。

第二节　中国近代数学符号与数学术语体系的建立

近现代数学一个最为明显和突出的标志，就是普遍地使用数

---

① 卢靖. 万象一原演式. 序. 光绪二十八年(1902)石印本
② 周达. 决疑数学. 序. 宣统元年(1909)扬州刻本
③ 李俨. 清代数学教育制度. 见：中算史论丛，第四集. 北京：科学出版社，1955.

学符号，它体现了数学学科的高度抽象与简练。明末清初西方初等数学传入中国时，利玛窦、徐光启等人在翻译中没有系统引进西方数学符号。《数理精蕴》中使用了一些，但很少。到伟烈亚力与李善兰在翻译《代数学》与《代微积拾级》时，他们根据中国文字创建了一套数学符号，系统地引入西方数学符号，成为晚清中国数学翻译与数学研究使用符号的规范。要点如下：

以干支及天、地、人、物四元对应 26 个英文字母，以二十八宿对应希腊字母。这些汉字加口字旁，以表示大写字母，如表 3.3.1 及表 3.3.2 所示。

表 3.3.1

甲	a	辛	h	辰	o	亥	v	呷	A	啈	H	㖘	O	咳	V
乙	b	壬	i	巳	p	物	w	𠮙	B	𠮨	I	𠯑	P	𪡃	W
丙	c	癸	j	午	q	天	x	𠰳	C	𠱥	J	吘	Q	𠯆	X
丁	d	子	k	未	r	地	y	叮	D	吇	K	味	R	𪡍	Y
戊	e	丑	l	申	s	人	z	𪠽	E	吜	L	呻	S	叺	Z
己	f	寅	m	酉	t			𠯇	F	𠲒	M	唒	T		
庚	g	卯	n	戌	u			㗋	G	𠰷	N	𠰭	U		

表 3.3.2

角	亢	氐	房	心	尾	箕	斗	牛	女	虚	危	室	壁
α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	υ	ξ
奎	娄	胃	昴	毕	觜	参	井	鬼	柳	星	张	翼	轸
o	ρ	σ	τ	ν	φ	χ	ψ	ω					
唃	吭	呧	㕩	吣	㞙	嗘	㞮	吽	㚢	嘘	㞆	喀	㗞
A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N	Ξ
喹	喽	喟	㗂	嗶	嘴	嗲	哢	嘣	嘞	喔	㖹	噀	嘭
O	P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω					

直接引用西方数学中的关系符号、运算符号与数量符号。各类函数符号与微积分符号用汉字或其偏旁部首表记，如表 3.3.3 所示。

表 3.3.3

符号	现今符号	意义	符号	现今符号	意义
⊥	+	加，正	周	π	圆周率
丅	−	减，负	对（天）	$\lg x$	常用对数
$\frac{\perp}{\top}$	±	加减合书	讷（天）	$\ln x$	自然对数
×，·	×	乘	弦（天）	$\sin x$	正弦
÷	÷	除	余弦（天）	$\cos x$	余弦
——	——	分数线	切（天）	$\tan x$	正切
天^{卯}	x^n	指数	余切（天）	$\cot x$	余切
$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$	方根	正割（天）	$\sec x$	正割
甲：乙：：丙：丁	$a:b=c:d$	比例	弧（正弦＝天）	$\arcsin x$	反正弦
=	=	等号	函（天）	$f(x)$	函数
>	>	大于号	噝（天）	$F(x)$	函数
<	<	小于号	⿰禾天	dx	微分
°	°	角度	⿰禾地	$\int y$	积分
∞	∞	无穷大	$\frac{⿰禾天}{⿰彳地}$	$\frac{dy}{dx}$	导数
0	0	零	$\frac{⿰禾天^{卯}}{彳^{卯}地}$	$\frac{d^n y}{dx^n}$	高阶导数
[卯]	$N!$	阶乘	∵	∵	因为
$\sqrt{丅一}$	i	虚数	∴	∴	所以
(　)	(　)	小括号	{　}	{　}	大括号
[　]	[　]	中括号			

数学术语的统一，对于数学知识的传播与普及、中外数学思想和方法的交流有着十分重要的作用。16 世纪末以后，西方数学

两度传入中国，于是出现了几何、三角、代数、解析几何、微积分等学科中大量新的数学汉语术语。伟烈亚力与李善兰在翻译《几何原本》、《代数学》、《代微积拾级》等书时，一方面继承了徐光启等人的译名，另一方面考案拟定了一批近代数学术语，其译名涉及代数学、解析几何、微积分三个学科。

代数学术语

实数(有理数)[1]	常对数(常用对数)
合名法(二项式定理)	无定(不定)
对数根	式
项	次
一项式(单项式)	多项式
系数	倍数
常数	方程式(方程)
根	虚数
叠代	泛系数(待定系数)
自然对数	双曲线对数
级数	有比例式
分式	平方根
立方根	同数(值)
元	灭数(根)
越式(超越式)	

解析几何术语

代数几何(解析几何)	横轴
纵轴	纵横线(坐标轴)
原点	象限
极距	极(极点)

① 括号内为现在使用的相应术语，下同。

带径(矢径)	曲线
倚度(倾角)	椭圆
长径，长轴	短径，短轴
两心率(离心率)	椭率(椭圆离心率)
心(焦点)	中点(中心)
准线	相属轴(共轭轴)
相属径(共轭径)	相属双曲线(共轭双曲线)
双曲线	渐近线
抛物线	代数曲线
立方抛物线	半立方抛物线
三乘方抛物线	越曲线
对数曲线	螺线
双曲螺线	摆线
亚奇米德螺线	母轮(母圆)
曲面积(旋转曲面)	渐伸线(渐屈线,法包线)
切线	切点
次切线	法线
次法线	

微积分术语

常数(常量)	变数(变量)
函数	反函数
自主变数(自变量)	越函数(超越函数)
增函数	损函数(减函数)
阴函数(隐函数)	阳函数(显函数)
繁函数	重函数(复合函数)
长数(增量或改变量)	圆函数或角函数(三角函数)
通径(参变量)	限(极限)
正流数(微分)	反流数(积分)

无穷	无限
微分	积分
微分系数(导数)	偏微分
偏微分系数(偏导数)	全微分
溢率(微分)	叠求微分(高阶微分或高阶导数)
详式(展开式)	曲率
曲率半径	线微分
发级数(发散级数)	敛级数(收敛级数)
凹	凸
极大	极小
独异点(奇异点)	弯点(拐点)
倍点(多重点)	歧点
特点(孤立点)	

这些译名大部分在《代微积拾级》中列出。1872年，伟烈亚力为卢公明《英华萃林韵府》编写英汉《数学与天文学术语》，共收入数学名词近四百条，上述译名也均被收入。这是清末以来，中国数学名词审订工作的开端。由于伟烈亚力与李善兰所创的代数、解析几何和微积分的术语，从中国读者出发，尽量将西方数学知识与中国传统数学概念相联系，容易被中国人接受，所以多为后世所沿用，其中代数学有44%、解析几何有50%、微积分学有65%的术语一直沿用至今。[①] 这对于近代西方数学知识在中国的传播与普及起到了十分重要的作用。

华蘅芳与傅兰雅的译作《代数术》和《微积溯源》基本沿用伟烈亚力与李善兰的译名，在《决疑数学》中又拟定了一些概率论的译名，如

---

① 汪晓勤. 伟烈亚力与中西数学交流. 中科院自然科学史研究所博士论文. 1999. 88

事(事件)	决疑数(概率)
决疑率(概率)	排列
丛事(事件之积)	不相关之事(互不相容事件)
指望决疑数(数学期望)	不关景决疑数(数学期望)
关景决疑数	极小平方法(最小二乘法)
大数	相关
母函数	循环级数

除了排列、大数、相关、母函数等少数几个术语外，大多未被后世采用。

第三节　晚清汉译数学著作对日本近代数学的影响

19世纪后期，日本也面临西方列强用坚船利炮打开国门的危机，从而为图自强走上西化维新的道路。首先在长崎设海军传习所，建立日本近代军事技术与教育的基地。由于西学翻译引入的需要，又于1856年2月在东京设立以培养翻译人才为宗旨的蕃书调所(后易名为开成所、开成学校、大学南校，为东京大学前身)，系统引入西学。早期引进的西学书籍主要是中国学者翻译的汉译书籍。日本学习西洋数学是从长崎海军传习所与开成所开始的，早期内容多为三角、对数、几何，主要来源于徐光启、李之藻等人的译著。

1862年，日本人士高杉晋作(1839—1867)、中牟田仓之助(1837—1916)与五代友厚(1834—1885)等人访问上海，购得大量中国出版的汉译西方科学技术著作。高杉购得《数学启蒙》与《代数学》，在中牟的购书中除这两书外还有《代微积拾级》、《谈天》、《重学》等。据中牟田仓之助就学海军传习所期间的同学小野友五郎(1817—1898，后为海军中将)发表在《数学报知》89号

(1894 年 5 月)上的文章回忆，他从安政二年(1855)后之四五年开始学习出自中国人之手而以“代微积”为名的著作。由此可见，早在高杉等人上海购书之前的 1859 年，《代微积拾级》在中国一出版就迅速传入日本。

幕府末期乃至明治维新时期，日本数学界分化为和算家与洋算家两大阵营。洋算家虽通西方语言，但仍难以直接通过学习西方数学原著来理解较深的西方数学知识。由于《代微积拾级》等汉译著作是精通汉文化圈传统数学的中国数学家与西方传教士合作翻译的，译著中充分考虑了中国固有的数学文化传统，不仅中国人容易理解，而且对于同样具有中算传统的日本人来说，也易于接受，因此汉译数学著作是他们接受西方数学的中介，他们以汉译数学著作为学习基础，以便进一步学习西方数学原著。《代微积拾级》在幕末明治初期二十年内，成为日本人学习微积分的标准教材。著名洋算家神田孝平(1830—1898)早年学汉学，后转向西学，并积极引进西学，1862 年出任洋书调所数学教授。他在此任职期间学习并教授过微积分，使用的教材就是《代微积拾级》，现有其 1864 年的《代微积拾级》抄本传世，藏于日本东北大学图书馆。他后来直接阅读罗密士的原著，著《代微积拾级译例》。此外如柳楢悦(1832—1891)等很多日本学者与海军军官都直接学习过《代微积拾级》，或者学习西文原著而同时参考该书。

1872 年福田半(1850—1888)的《代微积拾级译解》，主要以中文的《代微积拾级》为底本，并参考罗密士 1871 年再版的英文原著翻译而成。幕末著名和算家大村一秀(1824—1890)又将《代微积拾级》翻译成日文。

幕末明治时期对日本数学界影响较大的中国汉译西学书籍主要有以下诸书：

《几何原本》；

《代数学》(明治 5 年塚本明毅覆刻出版)；

《代微积拾级》;

《数学启蒙》;

《代数术》(神保长致训点,1875年出版)。

《代微积拾级》传入日本的同时，也传入了《代微积拾级译例》，其中包括伟烈亚力的序文与英汉数学名词术语对照表。对照表中共收435项条款和330条数学名词，这些数学名词多被当时的日本数学家所采用，并且大多被一直沿用至今。[①]《代微积拾级》与《代数学》等汉译高等数学著作在日本数学的现代化进程中起到了十分重要的作用。

① 冯立升.《代微积拾级》在日本的流传和影响. 自然辩证法通讯. 1999, 21(4): 41

第四编

清末的数学研究与数学教育

第一章 夏鸾翔等人的研究工作

第一节 夏鸾翔及其《夏氏遗书》

夏鸾翔，字紫笙，浙江钱塘(今杭州市)人，生于清道光乙酉十一月十六日(1825年12月25日)，[①] 卒于同治三年(1864)，是清代后期一位重要的数学家。

夏鸾翔出生在一个书香门第，自幼性情沉稳，刻苦勤学，酷爱绘画与诗歌。他十六岁时考取县学生员，博览经史。由于家庭的影响，鸾翔热心于功名，寄望于科举。他十八岁时首次参加科举考试，但未中第。此后又曾多次参加考试，均落第，但其仕进之心始终未改。

1845年是夏鸾翔一生中十分重要的一年，决定了他后半生所走的道路。这一年夏天，他拜项名达为师，开始系统地学习数学知识，同时又得到戴煦的指教。项名达开始时传授给鸾翔的主要是传统的数学和天文学知识，如《周髀算经》、《九章算术》等。当

① 刘洁民. 关于夏鸾翔的家世及生平. 中国科技史料，1990，20(4)：47

时项氏正主讲杭州紫阳书院，并致力于《象数一原》的写作，加之年老多病，故鸾翔学业进展并不快，至项氏1850年去世时，学尚未成。但项氏治学严谨，见识广博精深，而且与当时的学术界有许多联系，使鸾翔有可能了解数学研究的最新成果，为其今后的研究打下基础，他的早期数学著作《少广缒凿》大约完成于这一时候。1852年至1856年是夏鸾翔在数学研究上走向成熟的时期。他经过名师指点，多年学习并阅读了包括项名达、戴煦、李善兰等名家的数学著作，逐步达到了数学研究的前沿。从他于1856年为戴煦所著的《外切密率》和《假数测圆》二书所作的序中可以看出他对数学的见解已相当深刻精辟了。

1857年春，夏鸾翔以输饷议叙的方式得到了一个从七品京官的职位，这是他多次参加科举考试失败后为仕进做出的新的努力。在赴京上任的途中，他又写成了一部数学著作，定名为《洞方术图解》。夏氏入京后先为詹事府主簿，后又迁任光禄寺署正。1858年春夏之交，夏鸾翔因母亲去世归家守制，从此再也没有回到北京。1858年夏至1860年初，夏鸾翔名义上是居家守制，但由于太平天国的军队在江浙一带的强大攻势，杭州四周战事迭起，并且杭州城也于1860年3月被攻破，夏鸾翔已不可能在家乡过平静的生活。从其诗中可以知道，1859年至1861年，他在清军中做军需工作。这一时期，正值徐有壬任江苏巡抚，他和夏鸾翔是老相识，又同在苏州，学术上当有所交流。1860年初，李善兰又应徐有壬之邀至其府中为其幕宾，应该能与夏氏相见。至迟在此时，夏鸾翔应该见到了李善兰所译的《代微积拾级》，这对他后期的数学研究产生了重大的影响。他掌握了项、戴、徐、李诸家之说，又学习到了西方的微积分思想，达到了融会贯通的程度，其《致曲术》与《致曲图解》大约完成于这一时期。

咸丰十一年(1861)十一月二十八日，太平军再次攻克杭州，清军和太平军展开殊死的较量。战争使得夏鸾翔的仕进之梦最终破

灭。1862年初，他辞去官职，偕妻离开家乡，辗转到达广东，并在东莞县度过了端午节。在颠沛流离中，夏鸾翔仍然坚持着数学研究，这一年春天，他完成了《万象一原》九卷。大约在1863年初春之前，夏鸾翔已经到达广州城，不久便结识了邹伯奇和吴嘉善。由于夏氏随身带去了自己的主要著作及戴煦的《求表捷术》和徐有壬的数学著作，因而得与邹、吴一起探讨交流。1863年底，郭嵩焘(1818—1891，字伯琛，号筠仙，湖南湘阴人，著名学者，洋务派后期代表人物)到广州任广东巡抚后，筹建舆图局和同文馆，同时与广州学者建立了密切的联系。筹建中的同文馆拟设西文教习、中文教习各一人。郭嵩焘打算聘请夏鸾翔为中文教习，可惜夏氏未及到任就去世了，年仅四十岁。

夏鸾翔多才多艺，"善诗文，旁及音韵、天文、卜筮、星命、绩事、篆刻，皆究其奥。"在《国朝杭郡诗三辑》中收入了他的诗作五十首，其中多有佳作。他还著有《春晖山房诗集》四卷和《岭南集》一卷，"诗多忧时感事之作，五言尤佳。"他的《南北方音》五卷是音韵学方面的专著。他精于篆刻，有《为云来镌小印歌》及《与云来论印歌》诗二首，所论篆刻及金石鉴别、文字流传等俱有一定见解。他又颇精绘画，尤工白描人物，他曾为庄仲方所著《碧血录》五卷绘图121幅，共232个人物，"历朝官制，文武冠服，考据详明，足徵学问。"①

夏鸾翔研究数学近二十年，成书多种，遗稿有《少广缒凿》一卷(约1850)、《洞方术图解》二卷(1857)、《致曲术》、《致曲图解》各一卷(约1860～1861)及《万象一原》九卷(1862)。前四种合刊为《夏氏算书遗稿四种》。

《少广缒凿》一书就开平方、开高次方、求解一般高次方程给出十四条"捷术"，获得了和牛顿程序等价的结果。其中包括"开

① 刘洁民. 晚清著名数学家夏鸾翔. 中国科技史料，1986，7(4)：27～30

平方捷术”两条、“开诸乘方捷术”四条、“天元开诸乘方捷术”八条。

“开平方捷术一：小初商为一借根。以一借根除本积得二借根。并一、二借根，半之，为三借根。以三借根除本积得四借根。并三、四借根，半之，得五借根。以五借根除本积得六借根。下皆如是，求至借根小者渐大、大者渐小，与方根密合而止。”

我们记“方积”为 A，“小初商”为 a，考虑方程

$$f(x)=x^2-A=0，f(a)<0<f(a+1)。$$

又记一借根为 x_1，二借根为 x_2，…，依照术文，有

$$x_1=a,$$

$$x_2=\frac{A}{x_1}\left(=x_1-\frac{x_1^2-A}{x_1}=x_1-\frac{2f(x_1)}{f'(x_1)}\right),$$

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}\left(=x_1-\frac{x_1^2-A}{2x_1}=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right),$$

$$x_4=\frac{A}{x_3}\left(=x_3-\frac{2f(x_3)}{f'(x_3)}\right),$$

$$x_5=\frac{x_3+x_4}{2}\left(=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}\right),$$

$$x_6=\frac{A}{x_5}\left(=x_5-\frac{2f(x_5)}{f'(x_5)}\right),$$

……

一般地，我们可将其写成

$$x_1=a,$$

$$x_{2k}=\frac{A}{x_{2k-1}}\left(=x_{2k-1}-\frac{2f(x_{2k-1})}{f'(x_{2k-1})}\right),$$

$$x_{2k+1}=\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}\left(=x_{2k-1}-\frac{f(x_{2k-1})}{f'(x_{2k-1})}\right),$$

$k=1，2，\cdots$

值得注意的是术文最后一句：“下皆如是，求至借根小者渐大、

大者渐小，与方根密合而止。”可以看出，夏鸾翔已经认识到，一般情况下的开平方可能是一个无穷过程，所得的逐次近似值（诸借根）x_k（$k=1, 2, \cdots$）从大、小两个方向逼近方程的根。“密合”一词表明夏氏认识到这一逼近过程是一个极限过程。全书十四条术文，每条术文之末均有类似的话。

开平方捷术二与此术基本相同，只是从“大初商”b作起。依照术文，可写出一般公式：

设 $f(x)=x^2-A=0$，$f(b-1)<0<f(b)$，则有

$$x_1=b,$$

$$x_{2k}=\frac{A}{x_{2k-1}}\left(=x_{2k-1}-\frac{2f(x_{2k-1})}{f'(x_{2k-1})}\right),$$

$$x_{2k+1}=\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}\left(=x_{2k-1}-\frac{f(x_{2k-1})}{f'(x_{2k-1})}\right),$$

$k=1, 2, \cdots$

“开诸乘方捷术一：小初商为一借根。以略大于本积之积为外积，其根为外根。以外积与外根加一之积相减，又减一，为递次除法。一借积减本积，余以除法除之，得数加一借根为二借根。二借积减本积，余以除法除之，得数加二借根为三借根。下皆如是，求至借根渐大，与方根密合而止。”

记“小初商”为 a，“本积”为 $A(A>0)$，考虑方程

$$f(x)=x^n-A=0。(n>2，是正整数)$$

设 T 略大于 A，且其 n 次方根 t 容易求得，即 $T=t^n$，则取 T 为“外积”，t 为“外根”。令 $D=(t+1)^n-t^n-1=f(t+1)-f(t)-1$ 为“递次除法”，再记一借根为 x_1，二借根为 x_2……依照术文，有

$$x_1=a,$$

$$x_2=x_1+\frac{A-x_1^n}{D}\left(=x_1-\frac{f(x_1)}{D}\right),$$

$$x_3=x_2+\frac{A-x_2^n}{D}\left(=x_2-\frac{f(x_2)}{D}\right),$$

……

一般地，设 $f(x)=x^n-A=0$，$f(a)<0<f(t)\leqslant f\left(a+\frac{1}{2}\right)$，令 $D=(t+1)^n-t^n-1$，则

$$x_1=a,$$

$$x_{k+1}=x_k+\frac{A-x_k^n}{D}\left(=x_k-\frac{f(x_k)}{D}\right),$$

$k=1，2，\cdots$

"开诸乘方捷术三：小初商为一借根。以略小于本积之积为内积，其根为内根。以内积与内根加一之积相减，又减一，为递次除法。一借积减本积，余以除法除之，得数加一借根为二借根。二借积内减本积，余以除法除之，得数减二借根（以下诸数皆一加一减相间）为三借根。下皆如是，求至借根小者渐大、大者渐小，与方根密合而止。"

记"小初商"为 a，"本积"为 A，取 a 为"内根"。设 $f(x)=x^n-A=0$，$f(a)<0<f\left(a+\frac{1}{2}\right)$，诸借根记法如前，令 $D=(a+1)^n-a^n-1$，则依照术文，有

$$x_1=a,$$

$$x_2=x_1+\frac{A-x_1^n}{D}\left(=x_1-\frac{f(x_1)}{D}\right),$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2^n-A}{D}\left(=x_2-\frac{f(x_2)}{D}\right),$$

……

$$x_{2k}=x_{2k-1}+\frac{A-x_{2k-1}^n}{D}\left(=x_{2k-1}-\frac{f(x_{2k-1})}{D}\right),$$

$$x_{2k+1}=x_{2k}-\frac{x_{2k}^n-A}{D}\left(=x_{2k}-\frac{f(x_{2k})}{D}\right)。$$

书实上，可将此术统一表示为

$$x_1=a,$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{D},$$

$k=1, 2, \cdots$

开诸乘方捷术二与四分别和一与三基本相同，只是从“大初商”作起。因而开诸乘方的四个“捷术”道理相同，只是逐次近似值(诸借根)x_k逼近方程的根的方向和速度不同。

“天元开诸乘方捷术”讨论一般高次方程的求根问题，其方法是“开诸乘方捷术”的推广。例如：

“天元开诸乘方捷术一：小初商为一借根。以略大于本积之积为外积，其根为外根。以外积与外根加一之积相减，又减一，为递次除法。一借积(凡天元借根求借积法：以借根乘隅，加减长廉，以借根乘之；加减平廉，又以借根乘之；加减立廉，又以借根乘之；至加减方后，又以借根乘之；即借积也。外根之于外积亦然。)减本积，余以除法除之，得数加一借根，为二借根。二借积减本积，余以除法除之，得数加二借根，为三借根。下皆如是，求至借根渐大，与元数密合而止。”

记“本积”为A，“小初商”为a，诸借根为x_k，$k=1, 2\cdots$

设
$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x-A$$
$$=g(x)-A=0,\ f(a)<0<f(b)。$$

令
$$D=g(b+1)-g(b)-1=f(b+1)-f(b)-1,$$

则
$$x_1=a,$$

$$x_2=x_1+\frac{A-g(x_1)}{D}=x_1-\frac{f(x_1)}{D},$$

$$x_3=x_2+\frac{A-g(x_2)}{D}=x_2-\frac{f(x_2)}{D},$$

……

一般地，有 $x_{k+1}=x_k+\frac{A-g(x_k)}{D}=x_k-\frac{f(x_k)}{D}$，$k=1$，2，…

“天元开诸乘方捷术三”与此相同，只是从“大初商”算起，“捷术二”和“捷术四”都是讨论 x^n 的系数为 -1 的情形，其中 $f(x)$ 一为递增，一为递减。“捷术五”讨论 x^n 的系数不是 ± 1 的情形，并给出提高逐次近似值(诸借根) x_k 的精确度的方法。“捷术六”和“捷术七”是夏鸾翔对一般高次方程迭代解法的初步探索。“捷术八”将牛顿法和秦九韶法(霍纳法)结合使用，求解一个一般的一元二次方程。

各开方捷术中的 $D=f(t+1)-f(t)-1$ 即为多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x-A$ 的 $f'(t)$，① 因此我们可以认为夏氏对高次方程解法的讨论，达到了与牛顿法相同的结果。

《洞方术图解》二卷，主要包括两部分内容：一是对贾宪三角形性质的讨论，一是对三角函数表造法的改进。

夏鸾翔指出：“算学之递加图犹农夫之耒耜、渔人之网罟也，亦犹璇玑回文，纵横反复皆成文也。数虽至约，理则无穷。凡算法之精深者，皆不外乎是。……是图求法有斜、横、直、侧四种。自左上斜求至右下，自右上斜求至左下，曰斜行。自左横求至右，自右横求至左，曰横层。自上直求至下，曰直行。自右下斜求至左上，自左下斜求至右上，曰侧行。以上四种相为错综，算法皆有条不紊，亦数之赜而理之正者也。”他详细讨论了贾宪三角形的性质，给出很多恒等式。

斜行求法有以下几种：

1. “以单一为一率，根为二率。根加一以乘二率，二除之，得三率。根加二以乘三率，三除之，得四率。根加三以乘四率，四

① 李俨．中算家的方程论．见：李俨．中算史论丛．第一集．北京：中国科学院出版，1954．298～299

除之，得五率。此求斜行第一法也。”

这里的“单一”即是数字1，将“根”记为n，依照术文，有

$$C_{n+1}^{2}=\frac{n+1}{2}C_{n}^{1}，C_{n+2}^{3}=\frac{n+2}{3}C_{n+1}^{2}，\cdots$$

一般地，有

$$C_{n+k}^{k+1}=\frac{n+k}{k+1}C_{n+k-1}^{k}, \tag{1}$$

其中$n=1，2，\cdots；k=1，2，\cdots$

2.“以单一为一率，根为二率。根减一乘二率，二除之，加入二率为三率。根减一乘三率，三除之，加入三率为四率。根减一乘四率，四除之，加入四率为五率。此求斜行第二法也。”

这相当于给出

$$C_{n+1}^{2}=C_{n}^{1}+\frac{n-1}{2}C_{n}^{1}，C_{n+2}^{3}=C_{n+1}^{2}+\frac{n-1}{3}C_{n+1}^{2}，\cdots$$

一般地，有

$$C_{n+k}^{k+1}=C_{n+k-1}^{k}+\frac{n-1}{k+1}C_{n+k-1}^{k}, \tag{2}$$

其中，$n=1，2，\cdots；k=1，2，\cdots$

3.“以后行求前行：本根之一率二率相减，为减一根之二率。本根之二率三率相减，为减一根之三率。本根之三率四率相减，为减一根之四率。此求斜行第三法也。”

这相当于给出公式

$$C_{n-1}^{k}=C_{n}^{k}-C_{n-1}^{k-1}。 \tag{3}$$

4.“以前行求后行：取本根一、二率并之，为加一根之二率。取本根一、二、三率并之，为加一根之三率。取本根一、二、三、四率并之，为加一根之四率。此求斜行第四法也。”

我们可将此条术文一般地表示成

$$C_{n}^{0}+C_{n+1}^{1}+C_{n+2}^{2}+\cdots+C_{n+k}^{k}=C_{n+k+1}^{k}, \tag{4}$$

此式实为(3)式的推广。

横层求法有以下几种：

1.“以单一为一率，根为二率。根减一以乘二率，二除之得

三率。根减二以乘三率，三除之得四率。根减三以乘四率，四除之得五率。此求横层第一法也。”

依照术文，有

$$C_n^2=\frac{n-1}{2}C_n^1,\ C_n^3=\frac{n-2}{3}C_n^2,\ \cdots$$

一般地，有 $$C_n^k=\frac{n-(k-1)}{k}C_n^{k-1}。\quad(5)$$

2. “以单一为一率，根为二率。根加一乘二率，二除之，内减二率得三率。根加一乘三率，三除之，内减三率得四率。根加一乘四率，四除之，内减四率得五率。此求横层第二法也。”

依照术文，有

$$C_n^2=\frac{n+1}{2}C_n^1-C_n^1,\ C_n^3=\frac{n+1}{3}C_n^2-C_n^2,\ \cdots$$

一般地，有 $$C_n^k=\frac{n+1}{k}C_n^{k-1}-C_n^{k-1},\quad(6)$$

此即(5)式。

3. “以下层求上层：取本根一、二率，递减之，为减一根之二率。取本根一、二、三率，递减之，为减一根之三率。取本根一、二、三、四率，递减之，为减一根之四率。此求横层第四法也。”

依照术文，有

$$C_n^1-C_n^0=C_{n-1}^1,\ C_n^2-(C_n^1-C_n^0)=C_{n-1}^2\cdots$$

一般地，可以得此术以下式表示

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_n^{k-m}=C_{n-1}^k。\quad(7)$$

“求横层第三法”是“以上层求下层”之法，相当于给出公式

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},\quad(8)$$

此即(3)式。

夏氏还给出求“直行”的两术

$$C_{n+2k}^{k+1}=\frac{(n+2k)(n+2k-1)}{(k+1)(n+k-1)}C_{n+2k-2}^{k}, \tag{9}$$

$$C_{n+2k-1}^{k}=\frac{k+1}{n+2k}C_{n+2k}^{k+1}, \tag{10}$$

和求“侧行”一术

$$C_{n-k}^{k+1}=\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{(k+1)(n-k+1)}C_{n-k+1}^{k}。 \tag{11}$$

此外，夏鸾翔还给出了“求斜行总数术”和“求横层总数术”。

“求斜行总数术曰：凡斜行，知有其根，又知有第几率，则以知率第几乘知率之数，根除之，于上。另置知率之数，根除之，以减上位。又加入所知率，即一率起至所知率止之总数也。”

即

$$C_{n-1}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n+1}^{2}+\cdots+C_{n+k}^{k+1}=\frac{k+2}{n}C_{n+k}^{k+1}-\frac{1}{n}C_{n+k}^{k+1}+C_{n+k}^{k+1}。 \tag{12}$$

整理后我们发现，此即为(4)式。

“求横层总数术曰：根为几者，置单一加倍几次得本层总数也。”

“单一加倍”即 $1+1=2$，设层数为 n，则有

$$C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+\cdots+C_{n}^{n}=2^{n}。 \tag{13}$$

上面的 13 个式子中，有的两式形成相同，但它们的意义不尽相同。从夏氏给出的这些式子可以知道，他对贾宪三角形的研究已是非常完备而透彻了。

在《洞方术图解》中，夏鸾翔还创设了一种利用招差术造正弦、正矢表的方法。设正弦表的间隔为 α 弧度，则诸角的正弦值可由

$$\sin n\alpha=n\alpha-\frac{1}{3!}(n\alpha)^{3}+\frac{1}{5!}(n\alpha)^{5}-\cdots \tag{14}$$

求出，式中 n 为正整数。使用此法，乘除计算量很大。夏氏以招差术预先求得正弦值的逐次差，然后仅以加减计算即可造正弦表。

要求出 $\sin n\alpha$ 的逐次差数，首先要求得 n^p 的逐次差数 Δn^p，$\Delta^1 n^p$，$\Delta^2 n^p$，…，$\Delta^p n^p$。夏氏算至 $p=12$，所得结果列为“单一起根诸乘方诸较图”，如表 4.1.1 所示。

表 4.1.1

n^p \ D_k^p \ Δ^k	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	…
n^0	1								
n^1	1	1							
n^2	1	3	2						
n^3	1	7	12	6					
n^4	1	15	50	60	24				
n^5	1	31	180	390	360	120			
n^6	1	63	602	2100	3360	2520	720		
n^7	1	127	1932	10206	25200	31920	20160	5040	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

记 D_k^p 为表中第 p 行第 k 个数，夏氏给出造表法为

$$D_k^p=kD_{k-1}^{p-1}+(k+1)D_k^{p-1}。$$

由 $\{n^p\}$ 的逐次差容易得到

$$n^p=\sum_{k=0}^{p}C_{n-1}^{k}D_k^p。$$

令 $p=1, 3, 5, \cdots$，得到 n，n^3，n^5，…各式，代入 $\sin n\alpha$ 的展开式中，整理，得

$$\sin n\alpha=\sum_{k=0}^{p}C_{n-1}^{k}\sum_{t=\left[\frac{k}{2}+1\right]}^{\infty}(-1)^{t+1}\frac{D_k^{2t-1}}{(2t-1)!}\alpha^{2t-1}。$$

求此式的逐次差，当 $k=n-1$ 时，得“求正弦诸较术”

$$\Delta^{n-1}\sin n\alpha=\sum_{t=\left[\frac{k}{2}+1\right]}^{\infty}(-1)^{t+1}\frac{D_{n-1}^{2t-1}}{(2t-1)!}\alpha^{2t-1}。\qquad(15)$$

例如，$\Delta^0\sin\alpha=\alpha-\frac{1}{3!}\alpha^3+\frac{1}{5!}\alpha^5-\frac{1}{7!}\alpha^7+\cdots$

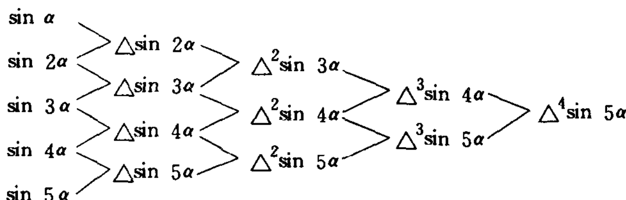
$$\Delta^1\sin 2\alpha=\alpha-\frac{7}{3!}\alpha^3+\frac{31}{5!}\alpha^5-\frac{127}{7!}\alpha^7+\cdots$$

$$\Delta^2\sin 3\alpha=-\frac{12}{3!}\alpha^3+\frac{180}{5!}\alpha^5-\frac{1932}{7!}\alpha^7+\cdots$$

$$\Delta^3\sin 4\alpha=-\frac{6}{3!}\alpha^3+\frac{390}{5!}\alpha^5-\frac{10206}{7!}\alpha^7+\cdots$$

将这些值用招差术列如表 4.1.2

表　4.1.2



依表加减即可求出 sin 2α，sin 3α，…，sin nα 的值。在实际计算中(15)式只取有限项，故 n 较大时 $\Delta^{n-1}\sin n\alpha$ 只有不多几项，这就比(14)式省去了须逐项计算之繁，算法有所改进。至于因使用差分法造成的误差，夏氏书中以“补尾术”予以修正。这一点涉及到插值公式的余项问题。同样的方法还可用来造正矢表。夏氏用意在乎算法研究，并未给出数表。

在《致曲术》中，夏氏讨论了一些曲线的弧长、旋转体的表面积以及二次曲线的性质。其中给出椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$$

从点(0，b)至点(x，y)的弧长，其结果相当于

$$l=\int_0^x\left(1-\frac{c^2x^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\left(x+\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3a^2}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5a^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7a^6}+\cdots\right)-$$

$$\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{x^3}{2\cdot 3a^2}+\frac{2x^5}{2\cdot 4\cdot 5a^4}+\frac{9x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7a^6}+\cdots\right)-$$

$$\frac{c^4}{a^4}\left(\frac{x^5}{2\cdot 4\cdot 5a^4}+\frac{3x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7a^6}+\frac{18x^9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9a^8}+\cdots\right)-$$

$$\cdots$$

这段弧长绕长轴、短轴旋转形成的表面积，夏氏的结果分别相当于

$$2\pi b\int_0^x\left(1-\frac{c^2x^2}{a^4}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi b\left(x-\frac{c^2x^3}{2\cdot 3a^4}-\frac{1\cdot c^4x^5}{2\cdot 4\cdot 5a^8}-\frac{1\cdot 3c^6x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7a^{12}}-\cdots\right),$$

$$2\pi a\int_0^y\left(1-\frac{c^2y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=2\pi a\left(y+\frac{c^2y^3}{2\cdot 3b^4}-\frac{1\cdot c^4y^5}{2\cdot 4\cdot 5b^8}+\frac{1\cdot 3c^6y^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7b^{12}}-\cdots\right)。$$

《致曲图解》则进一步对二次曲线进行研究并附以图解，论述了圆锥曲线与母面的关系、焦点、准线、焦距、切线、法线及双曲 函数，其中若干结果是《代微积拾级》等书中所没有的。夏氏通过对经过圆锥面上同一点截线连续变化的考察，提出了四个命题：

1. 椭圆至大、小径等而成平圆；
2. 抛物线为椭圆和双曲线之极式；
3. 椭圆和双曲线互为反式；
4. 平圆和正交双曲线互为反式。

并由此得到了一个研究圆锥曲线的方法：由圆会通椭圆，再通过“极式”或“反式”类推到抛物线和双曲线。书中还拓广了二次曲线直径的概念，并以独特的观点研究了双曲函数。[①]

---

① 刘钝．夏鸾翔对圆锥曲线的综合研究．见：第三届国际中国科学史讨论会论文集．北京：科学出版社，1990．12～17

据《致曲术》与《致曲图解》稿本，此二种原为一书之上下卷，该书题称《致曲》。《致曲》是中国数学史上第一部系统研究近世几何学的著作。

由前面的讨论可以看到，夏鸾翔对中国传统数学中的开方术、贾宪三角形和招差术及西方传入的解析几何和微积分均有所研究。夏氏的数学研究涉及的内容广泛丰富、使用的方法灵巧独特，因而获得了若干有创造性的结果。在西方变量数学传入之后，数学在中国的发展呈现出中西融合的特征，夏氏的工作可为代表。

第二节 丁取忠与《白芙堂算学丛书》

丁取忠，字肃存，号果臣，一号云梧，清嘉庆十四年十二月初五日(1810 年 1 月 9 日)午时生，光绪三年三月十四日(1877 年 4 月 27 日)巳时卒，[①] 湖南长沙人。他少年时就喜欢数学，但苦于没有老师，又因地处偏僻不能得书，所以全靠独立钻研，刻苦自学。他说："道光壬辰(1832)，余始习算"。1837 年，他在长沙城南书院与邹汉勋、黄朗轩共同钻研数学，"珠、笔、筹弗离于手，细草、图说弗离于案，今有、之分弗离于心。" 1844～1845 年间又与表弟李锡蕃继续在这里研讨数学。咸丰元年(1851)，他出版了自己的第一部著作《数学拾遗》，此系丁氏研究各家数学的心得笔记。后来他客居邵阳，在邹汉勋两弟汉章、汉池的协助下，以八个月时间"按度推里"，于 1852 年出版了《舆地经纬度里表》，参照魏源《海国图志》，将全国各县、世界各大城市距北京的方位、距离列成数表，属于地理数学。1854 年，丁取忠在长沙向时任湖南布政使的徐有壬请教数学。1856～1861 年间，他在湖北巡抚胡林翼幕下为宾，1860 年增订旧作《舆地经纬度里表》。同年，时曰

① 许康. 丁取忠和《白芙堂算学丛书》. 中国科技史料，1993，14(3)：34

醇也在武昌胡林翼幕府中，因见丁氏《数学拾遗》而受到启发，广衍“百鸡术”算题多种。1861年冬天，丁取忠在长沙与翰林院编修吴嘉善共同研究数学，成《算书十七种》，1862年印行活字本，题署“吴嘉善撰、丁取忠校”，丁取忠的工作是整理算稿、补例演草。以后此书又有补充，最终成《算书二十一种》二十一卷，包括：《笔算》一卷，《九章翼》十种十卷(《今有术》一卷、《分法》一卷、《开方术》一卷、《平方术》一卷、《平圆术》一卷、《立方立圆术》一卷、《方程术》一卷、《勾股术》一卷、《差分术》一卷、《盈朒术》一卷)，《平三角术》一卷，《弧三角术》一卷，《测量术》一卷，《天元一术》一卷，《天元名式释例》一卷，《天元一草》一卷，《天元问答》一卷，《四元名式释例》一卷，《方程天元合释》一卷，《四元草》一卷。该书于1872年在长沙刊行。

由于后来丁取忠常住在位于长沙城关东北隅毗邻荷池精舍的求忠书院，[①] 他便在那里积极筹备开展数学研究和出版数学书籍的活动，首先是酝酿《粟布演草》一书的撰写。1870年，丁氏一度去广东，为亡友邹伯奇刊刻《邹征君遗书》。返湘后，自感心力已衰，老而无成，于是在培养后学和编印数学书籍上花了很大功夫。他带领高弟新化黄宗宪(字玉屏)、湘阴左潜(字壬叟，？—1874，左宗堂的侄子)、湘乡曾纪鸿(字栗诚，1848—1877，曾国藩的次子)等人共同研究数学，并编、著、审、校数学书籍二十余种，从1872至1877年间，陆续汇刻为《白芙堂算学丛书》。白芙堂是丁氏家族中的一支所建的一个家祠，坐落在长沙县河西都塘岭乡北湖塘村，与古荷池精舍相距数十里之遥。[②]

《白芙堂算学丛书》收入数学书籍共计二十三种，各书书名及丁氏刊刻时间如下。

---

① 许康. 丁取忠和《白芙堂算学丛书》. 中国科技史料，1993，14(3)：35

② 许康. 丁取忠和《白芙堂算学丛书》. 中国科技史料，1993，14(3)：38

元代著作三种：李冶《测圆海镜》十二卷(1873)，《益古演段》三卷(1873)，朱世杰《四元玉鉴》三卷(1875)。

清代中叶著作四种：李锐《天元勾股细草》一卷(1872)，《开方说》三卷(1873)，张敦仁《缉古算经细草》三卷(1876)，张作楠《八线对数表》一卷(1874)。

清代后期著作七种：徐有壬《务民义斋算学》七种十一卷(1872)，吴嘉善《算书二十一种》二十一卷(1874)，徐有壬《割圆八线缀术》四卷(1873，徐有壬撰、吴嘉善述草、左潜补草)，夏鸾翔《少广缒凿》一卷(1876)，时曰醇《百鸡术衍》二卷(1873)，李锡蕃《借根方勾股细草》一卷(1872)，邹伯奇《格术补》一卷(1877)。

丁取忠及其弟子著作八种：丁取忠《数学拾遗》一卷(1874)，《舆地经纬度里表》一卷(1873)，《粟布演草》二卷补一卷(1875，第一卷丁取忠、左潜、曾纪鸿、吴嘉善、李善兰同撰，第二卷邹伯奇、丁取忠、左潜同撰，补卷丁取忠撰)，《对数详解》五卷(1873，丁取忠、曾纪鸿撰)，黄宗宪《求一术通解》二卷(1874)，左潜《缀术释明》二卷(1875)，《缀术释戴》一卷(1875)，曾纪鸿《圆率考真图解》一卷(1874，左潜、曾纪鸿、黄宗宪同撰)。

外国人汉文著作一种：日本人加悦傅一郎《算法圆理括囊》一卷(1874)。

其中，《粟布演草》讨论用高次方程解整存零取(经相同时间分批支取相等金额)的复利息问题，属于商业数学；《对数详解》介绍对数理论及应用，提出14条法则，附有从1至10的精确到10^{-23}的常用对数值及99个真数的对数表，该书系对《代数术》第十八卷“对数”的详解；《割圆八线缀术》阐述徐有壬的“缀术”在三角函数幂级数展开式研究中所起的作用；《缀术释明》和《缀术释戴》系左潜用徐有壬的“缀术”分别解说明安图的《割圆密率捷法》和戴煦的《外切密率》中的级数展开式；《圆率考真图

解》用几何图形证明了

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{4}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{5}{27}+\arctan\frac{1}{12}+\arctan\frac{1}{13}$$

两式，并利用反正切函数的幂级数展开式

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots$$

计算 π 值。

丁取忠和他的弟子们在古荷池精舍活动的这几年时间，使得湖南已成绝学的数学研究出现生机，并取得了一些成果。有的学者将他们称为(清末)“长沙数学学派”。所刊《白芙堂算学丛书》堪称善本，初刊之后又翻刻翻印，流传较广，影响很大。

第三节　时曰醇及其《百鸡术衍》

时曰醇(1807—1880)①，字清甫，嘉定(今上海嘉定县)人。少时“入监，专治九数”。咸丰十一年(1861)，他与丁取忠同在武昌为湖北巡抚胡林翼的幕宾，其间曾与丁氏商讨百鸡术，“别后数月乃得通之”。同年重九日，时氏序成《百鸡术衍》二卷。时曰醇晚年被聘入广方言馆为算学教习，其时虽已“年老聋瞽”，仍为“诸生口讲指画，剖毫析芒”。他的著作还有《今有术申》一卷和《求一术指》一卷，而《百鸡术衍》二卷为其代表作。

对《张丘建算经》百鸡问题的研究，至清代骆腾凤、丁取忠已取得较大进展。前者用孙子定理求解，后者设一物为零用二色

① 李兆华. 中国数学史. 台北：文津出版社，1995. 339

差分术求解。时曰醇吸取两者特别是后者的方法并加以改进，对百鸡问题进行了系统的研究。在其《百鸡术衍》中，时氏将百鸡问题推广为物数非两两互素、共物和共值不等的情形并给出一般的解法。

《百鸡术衍》全书共二十八题，以“旧学商量加邃密，新知培养转深沉”十四字为序，每序各有上下两题。上题中的“旧、学、商”三题，题各成组，“量加”、“邃密新”、“知培养转深沉”各成一组(简称为二上、三上、六上题)，共为六组。相应的下题同样分别成组，亦为六组。诸上题是形如

$$\begin{cases} x+y+z=M, \\ \frac{b}{a}x+\frac{d}{c}y+\frac{f}{e}z=nP \end{cases}$$

的三元一次不定方程组。其中，a，c，e 分别是大物，中物，小物的物数，b，d，f 分别是其相应的值钱数，M 为共物，nP 为共值。a，c，e，b，d，f，M，nP 皆为正整数，且$(a,b)=(c,d)=(e,f)=1$，$\frac{b}{a}>\frac{d}{c}>\frac{f}{e}$。相应的下题具有如下的形式：

$$\begin{cases} x+y+z=nP, \\ \frac{e}{f}x+\frac{c}{d}y+\frac{a}{b}z=M。 \end{cases}$$

其中，f，d，b 为物数，e，c，a 为值钱数，nP 为共物，M 为共值，$\frac{e}{f}>\frac{c}{d}>\frac{a}{b}$。其余条件与上题相同。通过对全书的考察可知，$P$ 是$\frac{M}{(a,c,e,M)}$的最小素因子，n 是正整数，依赖于 b，d，f。[①] 每组的上题所给物数相同，值钱数不同；每组的下题所给值钱数相同，物数不同。每题用方程术与求一术两法求解。方程术又分为

① 李兆华．时曰醇《百鸡术衍》研究．见：李兆华．古算今论．天津：天津科学技术出版社，2000．175

“用大数求”、“用小数求”两法，求一术又分为“中大较大小较相求”及“大小较中小较相求”两法。时氏所用求一术法与骆腾凤法相同，而方程术法为其重点。该书一本张丘建旧例，每题均有且仅有三组正整数解。

时曰醇的三色差分解法步骤明确，通行于全书二十八题。兹以“知”上题为例，将原文及今译列表对照，分步说明其解法，如表 4.1.3 所示。

表 4.1.3

原　　文	今　　译
设甲物大二十八，值五。中六十三，值八。小二十一，值二。共物一千四百六十三，共值一百八十七。问物大、中、小各几何 答曰：(略)	设大、中、小物数各为 x，y，z 依题可得 $\begin{cases} x+y+z=1463 & (1) \\ \frac{5}{28}x+\frac{8}{63}y+\frac{2}{21}z=187 & (2) \end{cases}$
物率：大二十八约为四，中六十三约为九，小二十一约为三(以等七相约得) 值乘率：中小物率九三相乘得二十七约为九，大小物率四三相乘得一十二约为四，大中物率九四相乘得三十六约为一十二(以等三相约得)	物数之等除物数 $d_1=(28,\ 63,\ 21)=7$ 物率：4，9，3 值乘数之等除值乘数 $d_2=(27,\ 12,\ 36)=3$ 值乘率：9，4，12
约率：大小较二十一，中小较八，中大较一十三(以乘率九乘大值，乘率四乘中值，乘率一十二乘小值，相减而得) 通率：大小较四百四十一，中小较一百六十八，中大较二百七十三(以三物之等七，三值乘率之等三，通约率得之)	值乘率：9，4，12　值率：5，8，2 相乘：45，32，24 大减小，中减小，大减中得 约率：大小较 21，中小较 8，中大较 13 $d_1=7$，$d_2=3$ 相乘得 21，分别乘约率三较得 通率：大小较 441，中小较 168，中大较 273

续表 4.1.3

<table>
<tr><th>原　文</th><th>今　译</th></tr>
<tr><td>如方程，用大数求。
左行大值五　　　　右行大二十八
𝍠𝍬〇　　减尽　　𝍠𝍬〇
中值八　　　　　　中六十三
𝍡𝍪𝍣　　减余𝍱𝍩　　𝍢𝍩𝍤
共值一百八十七　　共物一千四百六十三
𝍤𝍪𝍢𝍮　　减余𝍪〇𝍦𝍱　　𝍦𝍫𝍠𝍭</td><td>设 $z=0$，则
$$\begin{cases}x+y=1463 & (3)\\ \frac{5}{28}x+\frac{8}{63}y=187 & (4)\end{cases}$$
令 $x=28u$，$y=63v$，则
$$\begin{cases}28u+63v=1463 & (右)\\ 5u+8v=187 & (左)\end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>以左行首位大值五遍乘右行。右行首位大二十八遍乘左行。两两相减，上余九十一为法，下余二千〇七十九为实</td><td>$$\begin{cases}140u+315v=7315 & (右)\\ 140u+224v=5236 & (左)\end{cases}$$
相减，得 $91v=2079$</td></tr>
</table>

续表 4.1.3

原　　文	今　　译
法九十一与中分母六十三求等得七。约六十三得九为乘率，亦约法九十一为一十三。以除实二千〇七十九，得一百五十九，不尽一十二。分母子无等不约，仍通内为二千〇七十九。以乘率九乘，得一万八千七百一十一为通分中物	$91\times\frac{y}{63}=2079$，$13\times\frac{y}{9}=2079$， $\frac{y}{9}=\frac{2079}{13}$，$y=\frac{18711}{13}$， 18711 为通分中物
亦以法一十三通总物一千四百六十三为一万九千〇一十九，而以所通中物减之，余三百〇八为通分大物	由(3)，$x=1463-y$ $=\frac{19019-18711}{13}=\frac{308}{13}$ 308 为通分大物
复以法除通分中物，得中物一千四百三十九，不尽四。分母子无等不约，仍通内为一万八千七百一十一。依法求中数减较。置大小较二十一，先去其四，递加至七较而除之适尽	$y=\frac{18711}{13}=\frac{13\times1439+4}{13}$ 不得整数。求减较次数：因 $\frac{13\times1439+(7\times21-4)}{13}$得整数，故 $\frac{13\times1439-(7\times21-4)}{13}$得整数 减较 7 次
乃七因大小较二十一得一百四十七以减中；七因中小较八得五十六以加大；七因中大较一十三得九十一以加小。得通分中物一万八千五百六十四，通分大物三百六十四，通分小物九十一	$y=\frac{18711-7\times21}{13}=\frac{18564}{13}$ $x=\frac{308+7\times8}{13}=\frac{364}{13}$ $z=\frac{0+7\times13}{13}=\frac{91}{13}$ 通分中物 18564，通分大物 364，通分小物 91

续表 4.1.3

原 文	今 译
复以法各除得中物一千四百二十八，大物二十八，小物七	$y_0=1428$，$x_0=28$，$z_0=7$
验小物七不应小分母二十一，依法求加较。以小加率中大较一十三递加至十四较而应分母	将这组值代入(2)，y，z 项皆不得整数。用 z 项求加较次数：因 $\frac{7+14\times13}{21}$ 为整数，故加较 14 次
乃以一十四乘大小较二十一得二百九十四，减中；乘中小较八得一百一十二，加大；乘中大较一十三得一百八十二，加小。得中物一千一百三十四，大物一百四十，小物一百八十九，为一答	$\begin{cases}y_1=y_0-14\times21=1134\\x_1=x_0+14\times8=140\\z_1=z_0+14\times13=189\end{cases}$ 为一答
又以通率大小较四百四十一，减中；中小较一百六十八，加大；中大较二百七十三，加小，而得又答	$\begin{cases}y_2=1134-441=693\\x_2=140+168=308\\z_2=189+273=462\end{cases}$ $\begin{cases}y_3=693-441=252\\x_3=308+168=476\\z_3=462+273=735\end{cases}$ 为又答

由上面的解法可以概括出时氏求解三色差分的步骤：先设一物为零，使三色差分化为二色差分，借方程术求得一组解；次由约率加减得一组非负整数解；再由约率加减得一组正整数解使其对应的值钱数亦皆为正整数；复由通率加减得其全部正整数解。

时氏对全书的问题都给出了正确的解答，那么他又是怎样构造出这些题目的呢？如何造出二上、三上、六上这三组题及其相应的下题是探讨造题法的关键。在前面我们已经看到，对于给定的上题，颠倒分子、分母，对换 x，z 的系数，又对换两个方程的常数项，就可得到与其相应的下题。问题又归结到如何构造这三组上题。可以看到，每组上题各有一题共物与共值相等，而其余各题共物与共值不等。每组上题的各题第一个方程相同，第二个不同。每组上题的物数答案相同。考察每组上题发现，由该组中的共物共值相等一题可导出该组中其余各题。兹以“知”上题的导出为例讨论时氏的造题方法。

即由“沉”上题

$$\begin{cases}x+y+z=1463,\\ \dfrac{55}{28}x+\dfrac{62}{63}y+\dfrac{8}{21}z=1463,\end{cases}$$

导出知上题

$$\begin{cases}x+y+z=1463,\\ \dfrac{5}{28}x+\dfrac{8}{63}y+\dfrac{2}{21}z=187。\end{cases}$$

或依时氏法，令 $x=28u$，$y=63v$，$z=21w$，由

$$\begin{cases}28u+63v+21w=1463, & (1)\\ 55u+62v+8w=1463, & (2)\end{cases}$$

导出

$$\begin{cases}28u+63v+21w=1463, & (3)\\ 5u+8v+2w=187。 & (4)\end{cases}$$

此二题中的(1)、(3)相同，故只要由(1)、(2)导出(4)即可。

1. 设所求(4)为

$$bu+dv+fw=nP, \tag{5}$$

取 $P=11$ 代入(5)，得

$$bu+dv+fw=11n。 \tag{6}$$

2. 解(1)、(2)，得 $u=5$，$v=18$，$w=9$，代入(6)，得

$$5b+8d+9f=11n。\tag{7}$$

3. 求 b，使 $(28, b)=1$。得 $b=1, 3, 5, \cdots, 55, \cdots$

求 d，使 $(63, d)=1$。得 $d=1, 2, 4, \cdots, 122, \cdots$

求 b，d，使 $\frac{b}{27}>\frac{d}{63}$。得

$b=1$；	$b=3$；	$b=5$；	…	$b=55$；
$d=1,2$；	$d=1,2,3,4$；	$d=1,2,4,5,8,10,11$；	…	$d=1,2,4,\cdots,122$。

4. 求 f。将 b，d 的值依次代入(7)。当 $b=5$，$d=8$ 时，

$$f=\frac{11n-5b-18d}{9}=\frac{11n-169}{9}。$$

用“加较法”，16 次加 11，即 $n=17$ 时，得最小正整数 $f=2$。

5. 检验 f 是否满足 $(21, f)=1$。$f=2$ 满足。检验 f 是否满足 $\frac{8}{63}>\frac{f}{21}$。$f=2$ 满足。故 $b=5$，$d=8$，$f=2$，$n=17$ 为所求。代入(6)，得

$$5u+8v+2w=17\times11=187。$$

由此得
$$\begin{cases}28u+63v+21w=1463, & (8)\\ 5u+8v+2w=187。 & (9)\end{cases}$$

6. 检验(8)、(9)是否与(1)、(2)的解相同。相同(物数答案相同)。故(8)、(9)为所求。将 $u=\frac{x}{28}$，$v=\frac{y}{63}$，$w=\frac{z}{21}$ 代入，即得“知”上题。

如将 b，d 值依次代入(7)至 $b=55$，按第 4，5，6 步骤演算，可得六上题中的全部六个题。

既然同解的题目可由组中共物共值相等的一题导出，那么进一步的问题是如何构造出共物共值相等的这个题目。也就是说，已知三物之数分别是 a，c，e，对应的值钱数分别是 b，d，f，满足 a，c，e，b，d，f 都是正整数，且 $(a, b)=(c, d)=(e, f)=1$，

$\frac{b}{a}>\frac{d}{c}>\frac{f}{e}$。求形如

$$\begin{cases}x+y+z=M,\\ \frac{b}{a}x+\frac{d}{c}y+\frac{f}{e}z=M,\end{cases}$$

或即

$$\begin{cases}au+cv+ew=M, & (10)\\ bu+dv+fw=M & (11)\end{cases}$$

的三元一次不定方程组，使其有且仅有三组正整数解，其中 M 是正整数。以时曰醇所用的方法构造这一问题并不困难。由(10)、(11)消去 M，得

$$(a-b)u+(c-d)v+(e-f)w=0。$$

求出它的一组解，以 v,u,w 的增减率调整这组解使(10)、(11)仅有三组正整数解，任取一组解代入(10)中可得 M。

综上可知，《百鸡术衍》给出三色差分的解题方法与造题方法，并在这两个方面多所创新。时氏采用丁取忠设一物为零的方法，所得二色差分借用梅文鼎《方程论》的方法求解，较二色差分本法简明，又首创约率简便算法、通率及其算法、加较减较法。由这些继承与创新的方法构成三色差分的严谨的解法。作为三色差分的最早记载的百鸡问题所给物数两两互素且共物与共值相等，时氏去掉了这些限制，使问题一般化。时曰醇之前的研究基本上是就题论题，未曾达到如此全面细致。《百鸡术衍》二卷可视为三色差分的系统总结。

第四节　黄宗宪及其《求一术通解》

黄宗宪，字玉屏，号小谷，湖南新化人。1871 年拜丁取忠为师，并协助校订《白芙堂算学丛书》。1876 年随清政府第一任公使郭嵩焘出使英国，后又去法国和西班牙，1882 年回国。于 1862 年著《求一术通解》二卷，收入《白芙堂算学丛书》，1874 年出版，

又收入《古琴古砚斋算稿》。该书是自张敦仁、骆腾凤、时曰醇的工作之后，对秦九韶“大衍术”研究十分深入且富有创意的著作。

对于求解同余式组 $N\equiv R_i(\mathrm{mod}A_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，秦九韶的“大衍术”解法分为三个步骤：

1. 将问数 A_i 化为两两互素的定母 a_i，即 $(a_i, a_j)=1$，$i\neq j$，$a_i|A_i$，且$[a_1, a_2, \cdots, a_n]=[A_1, A_2, \cdots, A_n]=M$；

2. 用“大衍求一术”求乘率 k_i，使 $k_ig_i\equiv1(\mathrm{mod}a_i)$，这里$\frac{M}{a_i}=m_i$ 为衍数，$m_i\equiv g_i(\mathrm{mod}a_i)$ $(g_i<a_i)$，g_i 称作奇数，即 $k_ig_i\equiv k_im_i\equiv1(\mathrm{mod}a_i)$；

3. 求用数 S_i 并用“孙子定理”求 N，即泛用数 $S_i=k_im_i$，于是 $N=\sum_{i=1}^{n}R_iS_i-PM$（$P$ 为非负整数）。

黄宗宪在《求一术通解》中，对秦氏算法程序作了三方面的修正，其在该书前的例言中称：

“一求定母，旧术极繁，至《求一术指》，稍归简捷，而约分之理，仍不易明。今析各泛母为极小数根，瞭如指掌，遇题有多式者，一索无遗。”

“一求乘率，旧术先以奇定相求，得奇一，再立天元累乘累加，亦觉眩目。今以定母衍数对列，辗转相减，递求寄数，即为乘率，不立天元。”

“一旧术有借用数之法，赘设，删之”。

其化问数为定母的方法是：

“求定母法，前法析泛母毕，乃遍视各同根(如三与三、五与五之类)。取某行最多者用之，余行所有，弃之不用。再视本行所有异根(如三与五之类)，或少于他行，则弃之(因他行已用，则此行必弃)；抑或多于余行，亦用之。或与他行最多者等，则此两行随意用之(用此则弃彼，用彼则弃此)。以所用数根连乘之，即得

本行定母。若某行各根皆少于他行者，则此位无定母。”

这正是我们今天所用的素因数分解求定数方法。此法最早出现于高斯(C. F. Guass. 1777—1855)的《算术研究》(1801)一书中。

黄宗宪用素因数分解的方法对秦九韶化问数为定数的算法进行改进，是受西学的影响。这种改进，从今日数学的角度来看，使定数计算原理较为清晰，理论臻于完善，但是从算法的角度来看，秦九韶方法因其机械性则更富有实用价值。[①②]

对于求乘率 k_i 的求一术，就算法程序而言，秦九韶“立天元一”的目的主要是布筹定位，而标识循环演算程序的起点，完全是可有可无的，[③] 因此黄宗宪《求一术通解》主张删去，法以“列定母于右行(左角上预寄一数)，辗转累减(凡定母与衍数展转累减，则其上所寄数，必辗转相加)，至衍数余一即止，视左角上寄数为乘率”，即以 m_i 与 a_i 入算。事实上，$g_ik_i \equiv m_ik_i \equiv 1(\mathrm{mod}\,a_i)$，演算程式与秦氏基本一致，秦氏以奇居右上，须使右上末后奇一为止，而黄宗宪以奇左下，故须使左下末后奇一而止。

黄宗宪又设“求反乘率”一法。所谓反乘率，即指满足 $g_ik_i' \equiv m_ik_i' \equiv -1(\mathrm{mod}\,a_i)$的 k_i'。黄氏求反乘率的方法也与大衍求一术大致相同，以衍数 m 与定母 a 作辗转相除，演算程序如下：

---

① 袁向东，李文林.《数书九章》中的大衍类问题及大衍总数术. 见：秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987. 159

② 李继闵. 关于“大衍总数术”中求定数算法的探讨. 见：秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987. 220

③ 李继闵. “大衍求一术”溯源，见：秦九韶与《数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987. 144

表 4.1.4

寄数		衍数	定母		寄数
$c_0=1$	q_0	m aq_0	a r_0q_1	q_1	$c_1=1$
$c_2=q_2c_1+1$	q_2	r_0 r_1q_2	r_1 r_2q_3	q_3	$c_3=q_3c_2+c_1$
$c_4=q_4c_3+c_2$	q_4	r_2 r_3q_4	r_3 r_4q_5	q_5	$c_5=q_5c_4+c_3$
…	…	… …	… …	…	…
$c_{2t-2}=q_{2t-2}c_{2t-3}+c_{2t-4}$	q_{2t-2}	r_{2t-4} $r_{2t-3}q_{2t-2}$	r_{2t-3} $r_{2t-2}q_{2t-1}$	q_{2t-1}	$c_{2t-1}=q_{2t-1}c_{2t-2}+c_{2t-3}$
$c_{2t}=q_{2t}c_{2t-1}+c_{2t-2}$	q_{2t}	r_{2t-2} $r_{2t-1}q_{2t}$	r_{2t-1} $r_{2t}q_{2t+1}$	q_{2t+1}	$c_{2t+1}=q_{2t+1}c_{2t}+c_{2t-1}$
		$r_{2t}=1$	$r_{2t+1}=1$		

按秦氏“求一术”，以奇数 g 与定母 a 入算，程序至左边奇数(衍数)下余数 $r_{2t}=1$ 而止，归算寄数得乘率 $k=c_{2t}=q_{2t}c_{2t-1}+c_{2t-2}$。黄氏求反乘率在秦氏程序求得余数 $r_{2t}=1$ 基础上再演算一步，至右边定母下余数 $r_{2t+1}=1$ 而止，从而归算寄数得到反乘率 $k'=c_{2t+1}=q_{2t+1}c_{2t}+c_{2t-1}$。

事实上，若令

$d_2=q_2$，$d_3=q_3d_2+1$，$d_4=q_4d_3+d_2$，…，$d_{2t}=q_{2t}d_{2t-1}+d_{2t-2}$，$d_{2t+1}=q_{2t+1}d_{2t}+d_{2t-1}$，

则有

$$r_1=a-gq_1=a-c_1g,$$

$$r_2=g-r_1q_2=g-(a-c_1g)q_2=c_2g-d_2a,$$

$$r_3=r_1-r_2q_3=r_1-(a-c_1g)-(c_2g-d_2a)q_3=d_3a-c_3g,$$

…　…　…　…　…　…

$$r_{2t-1}=r_{2t-3}-r_{2t-2}q_{2t-1}=\cdots=d_{2t-1}a-c_{2t-1}g,$$

$$r_{2t}=r_{2t-2}-r_{2t-1}q_{2t}=\cdots=c_{2t}g-d_{2t}a,$$

$$r_{2t+1}=r_{2t-1}-r_{2t}q_{2t+1}=\cdots=d_{2t+1}a-c_{2t+1}g。$$

当 $r_{2t+1}=1$ 时，$c_{2t+1}g=d_{2t+1}a-1$，即 $c_{2t+1}g\equiv-1(\bmod a)$，从而 $k'=c_{2t+1}$。这就证明了黄氏的“反乘率”也是符合数理的。

黄宗宪还利用反乘率概念自创求总数 N 之新法，法曰：

“先取题中减数最大者命为甲，其本位剩数为子。又取略小于甲之减数为乙，其本位剩数为丑。乃以甲乙求等，以等约乙，(无等不约，或以等约乙，得数，与甲仍有等者，则不约乙而约甲。或任约甲约乙俱有等者，则用析根法求之。后仿此)甲乙相乘得甲'，以乙累减子，余丙。又以乙累减甲，余丁。于丙内减去一丑(不足减者，加一乙以减之，下同)，余戊。以乙(比定母)丁(比衍数)对列两行，求得反乘率，以乘戊，得己。甲乙相乘得庚。并子庚得辛，以甲' 累减辛，余子'（以上为一次求法)。”

对于求解同余式组：

$$N\equiv R_i(\bmod A_i)(i=1,2,3,\cdots,n),\qquad (*)$$

黄氏反乘率新术分以下几个步骤：

1. 将问数 A_i 从大到小地排列，不妨为 $A_1>A_2>A_3>\cdots>A_n$。

2. 做子算法，求解

$$N\equiv R_1(\bmod A_1)\equiv R_2(\bmod A_2)。\qquad (**)$$

(1)将其化为等价的同余式组：$N\equiv R_1(\bmod a_1)\equiv R_2(\bmod a_2)$。这里$(a_1,a_2)=1$，并且 $[a_1, a_2]=[A_1, A_2]=a_1a_2=p_1$。

(2)再求出 B 及 C，使 $R_1\equiv B(\bmod a_2)$，$a_1\equiv C(\bmod a_2)$，要求 $B<a_2$，$C<a_2$。

(3)求 D：$D=B-R_2>0$，若 $B<R_2$，则 $D=(B+a_2)-R_2>0$。

(4)以 a_2(比定母)与 C(比衍数)入求一术，求反乘率 k_1'，$k_1'C\equiv-1(\bmod a_2)$。

(5)求同余式组(**)的解 r_1：

$Dk'_1=E$，$Ea_1=F$，$F+R_1=G$，则 $r_1\equiv G(\bmod p_1)$。

3. 作迭代，求解同余式组：$N\equiv r_1(\bmod p_1)\equiv R_3(\bmod A_3)$，再

按步骤 2 用子算法得其解 $r_2 \equiv G_1 (\mathrm{mod} p_2)$，其中 $p_2 = [p_1, A_3]$，继续作以下迭代演算：

$r_k \to R_1$，$p_k \to A_1$，$R_{k+2} \to R_2$，$A_{k+2} \to A_2$，$(k=1,2,3,\cdots,n-2)$

其中 $r_k \equiv G_{k-1} (\mathrm{mod} p_k)$，$p_k = [p_{k-1}, A_{k+1}]$，最后得到同余式组（*）的解为 $N \equiv r_{n-1} (\mathrm{mod} p_{n-1})$。

可以证明，黄宗宪的这一新法是合乎数理的，与 Euler 的解法同理。[1]

《求一术通解》对秦九韶的“借用”也有研究。秦氏称 $S_i = k_i m_i$ 为“泛用数”，且称满足 $\sum_{i=1}^{n} S_i = M+1$ 的 S_i 为正用。而实际上总有 $\sum_{i=1}^{n} S_i \equiv 1 (\mathrm{mod} M)$，故正用乃其特殊情形。同时，对于泛母 $\sum_{i=1}^{n} S_i = tM+1$，秦氏引入“借数”方法而化泛用为正用。称

(1)“或泛母多衍母倍数者，验元数奇偶，同类者，损其半倍（或三处同类，以三约衍母，于三处损之）各为正用数。”即当 $t \geqslant 2$ 时，若 A_i 与 A_j 同偶（有公因子），则将其相应的泛用 S_i 和 S_j 改为 $S_i - \frac{M}{2}$ 与 $S_j - \frac{M}{2}$。若 A_i，A_j，A_k，…，A_l 同偶（有公因子 d），则选取 h_i，h_j，h_k，…，h_l，使 $h_i + h_j + h_k + \cdots + h_l = hd$，而将其相应的泛用 S_i，S_j，S_k，…，S_l 改为 $S_i - \frac{h_i M}{d}$，$S_j - \frac{h_j M}{d}$，$S_k - \frac{h_k M}{d}$，…，$S_l - \frac{h_l M}{d}$。

(2)“或定母得一而衍数同衍母者，为无用数。当验元数同类者，而正用至多处用之，以等约衍母为借数，以借数损有以益其无，为正用。或多处无者，如意立数为母，约衍母，所得以如意

[1] 王翼勋．一次同余式组的欧拉解法和黄宗宪反乘率新术．自然科学史研究，1996，15(1)：40

子乘之，均借补之。或欲从省勿借，任之为空可也。”即，若 $a_i=1(S_i=0)$，且 A_i 与 A_j 有公因子 d，则将其相应的泛用 S_i 和 S_j 改为 $0+\frac{M}{d}$ 与 $S_j-\frac{M}{d}$。

若 $a_i=a_j=a_k=\cdots=a_l=1$，且 A_q 与 A_i，A_j，A_k，…，A_l 有公因子 d，则将其相应的泛用 $S_i, S_j, S_k, \cdots, S_l, S_q$ 改为 $\frac{h_iM}{d}$，$\frac{h_jM}{d}$，$\frac{h_kM}{d}$，…，$\frac{h_lM}{d}$ 及 $S_q-\frac{(h_i+h_j+h_k+\cdots+h_l)M}{d}$。

容易证明上述改造的用数完全满足同余式组，然而就同余式组求解的算理而言，正用概念是毫无用处的，秦九韶赘设此化泛用为正用的“借数”方法，可能是讨论同余式组可解条件的尝试。[①]黄宗宪也认识到秦氏“借用”内容的多余性，主张删去。

在《求一术通解》中，黄宗宪还对求一术与孙子定理给出了不十分严密的证明，这是孙子定理与大衍求一术在中国发明以后，中国数学家的首次理论证明。[②]同时还讨论了求一术在解二元一次不定方程方面的应用。黄宗宪关于同余式组求解的研究，丰富和深化了中国传统数学的不定分析方法，在其理论化方面具有一定的意义。

第五节 《考数根法》与《数根丛草》

晚清中国数学家的数学研究中，素数论方面的工作十分突出，具有代表性的成果是李善兰的《考数根法》与方士镰的《数根丛

---

① 莫绍揆. 论秦九韶大衍总数术. 见：数学史研究文集，第四集. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1993. 29

② 李文铭. 黄宗宪对孙子定理和求一术的预备性证明，见：数学史研究文集，第三辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1992. 112

草》。

中国古代的数论比较发达，但是一直没有出现素数概念。西方素数概念是在明清时期由传教士传入中国的，始见于《数理精蕴》下编卷三十八，并译作“数根”，其中《对数阐微》给出一个素数表。李善兰与伟烈亚力翻译《几何原本》后九卷时，也涉及到素数概念，他们沿用了“数根”译名。但是这些著作中都没有论及素数判定方法。这一问题引起了李善兰的兴趣，他晚年著《考数根法》，发表于艾约瑟主编的《中西闻见录》第二、三、四号(1872)，题曰“则古昔斋算学十四”，以作为《则古昔斋算学》十三种(1867)之后续。光绪二十八年(1902)《湘学报》将其转载，文字有改动。

欧拉(L. Enler, 1703—1783)定理和费尔马(P. Fermat, 1601—1665)小定理是数论中的两个重要定理。设 $N>1$ 是整数，$(a,N)=1$，则 $a^{\varphi(N)}\equiv 1(\mathrm{mod} N)$。此即欧拉定理。若 N 是素数，记为 p，则 $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod} p)$，此即费尔马小定理。李善兰《考数根法》所论素数判别法即与上述两个定理有关。李氏所给素数的判别法可概括如下：第一步求出 d。设 $(a,N)=1$，求得最小指数 d，使得 N 整除 a^d-1。第二步判别 N。N 为素数的充要条件是 d 整除 $N-1$，且任一形如 $1+kp$ 的数不整除 N。其中，k，p 为正整数，p 整除 d。为此，李善兰首先引入以下几个概念：

本数 N：

用数 a：$(a=2$ 或 $3)$

诸正数：a^n，(n 为自然数)

诸负数：a^n-N，

诸剩数 r_n：$a^n\equiv r_n(\mathrm{mod} N)$。

从其诸剩数概念看，实际上李善兰对同余概念有一定的认识。其四条判定方法如下：

1. 屡乘求一法。

“法以用数之诸方积，或大于本数，或大于本数之半者，与本数相减，余为乘法，乘法自乘，或再乘，以本数度之，不尽，复以乘法乘之，以本数度之，不尽，复以乘法乘之，以本数度之，如此递求，至不尽数为诸正数或诸负数而止。乃计共用乘法若干次，以次数乘用数之方数，为泛次，若不尽数为一，或一之负数，则泛次即定次，若为诸方积，或诸方之负数，则以其方数减泛次为定次。以定次度本数，若所余非一，则本数非数根；若余一，则视定次为何二数相乘之积，其相乘数为偶者，即为递加数，为奇者，倍之为递加数。乃置一，加一递加数，再加一递加数，如此递加，以递除本数，恰尽即止。若至得数小于法，仍不恰尽，则本数是数根。”

此法演算过程如下：

第一步　求定次 d，使 $a^d \equiv 1(\mathrm{mod}N)$。

(1)若 $a^n > N$ 时，以 $a^n - N$ 为乘法，作系列演算

$$(a^n - N)^k \equiv r_1(\mathrm{mod}N),\quad (k=2 \text{ 或 } 3)$$
$$(a^n - N)r_1 \equiv r_2(\mathrm{mod}N),$$
$$(a^n - N)r_2 \equiv r_3(\mathrm{mod}N),$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$(a^n - N)r_{m-1} \equiv a^t(\mathrm{mod}N)。$$

这时共用乘法 $k+m-1$ 次。

①当 $r_m = a^t$ 时，

$$(a^n - N)^{k+m-1} r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_{m-1} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdots r_{m-1} \cdot a^t(\mathrm{mod}N),$$
$$(a^n - N)^{k+m-1} \equiv a^t(\mathrm{mod}N)。$$

有
$$a^{n(k+m-1)} \equiv a^t(\mathrm{mod}N),$$
$$a^{n(k+m-1)-t} \equiv 1(\mathrm{mod}N)。$$

此时命 $n(k+m-1) = f$ 为泛次，$n(k+m-1) - t = d$ 为定次，故得

$$a^d \equiv 1(\mathrm{mod}N)。$$

②当 $r_m = -a^t$ 时，于是，

$k+m-1$ 为奇数时，即仍有 $a^{n(k+m-1)}\equiv a^{t}(\mathrm{mod}N)$；

$k+m-1$ 为偶数时，$n(k+m-1)-t=d'$ 为定次，则有

$$a^{d'}\equiv -1(\mathrm{mod}N)。$$

自乘得 $a^{2d'}\equiv 1(\mathrm{mod}N)$，这时令 $2d'=d$，这样也得

$$a^{d}\equiv 1(\mathrm{mod}N)。$$

③当 $r_m=1$ 或 -1 时，分别是上述①和②在 $t=0$ 的特例，也得到相应的 $a^{d}\equiv 1(\mathrm{mod}N)$ 及 d。

(2)若 $N>a^{n}$ 时，以 $N-a^{n}$ 为乘法，作上述演算也有

$$(N-a^{n})^{k+m-1}\equiv r_m(\mathrm{mod}N)。(k=2 \text{ 或 } 3)$$

按照上述方式也可得到相应的 $a^{d}\equiv 1(\mathrm{mod}N)$ 及其中的 d。

第二步　对于所具形式 $a^{d}\equiv 1(\mathrm{mod}N)$，确定 N 为素数的条件。

(1)当 $d\nmid N-1$ 时，则 N 不是素数；

(2)当 $d|N-1$ 时，考察 d 的因数 p。若存在某个正整数 i，使得

$$(1+2ip)|N，\text{当 } p \text{ 是奇数，}$$

$$(1+ip)|N，\text{当 } p \text{ 是偶数，}$$

则 N 不是素数。若否，N 是素数。

这条判定法满足 Euler 定理：若 $(a,N)=1$，则有

$$a^{\varphi(N)}\equiv 1(\mathrm{mod}N)。$$

作为欧拉定理的推论，容易得到费尔马小定理：若 $(a,N)=1$ 且 N 是素数，则 $a^{N}\equiv a(\mathrm{mod}N)$，亦即 $d|N-1$。事实上，若有 $a^{d}\equiv 1(\mathrm{mod}N)$，则必然有 $d|\varphi(N)$，当 N 为素数时，$\varphi(N)=N-1$，故有 $d|N-1$。李善兰在这里证明了该定理，同时指出，费尔马小定理的逆命题不真，即若 $(a,N)=1$，$a^{d}\equiv 1(\mathrm{mod}N)$，且 $d|N-1$，则 N 未必是素数。

上述方法是《考数根法》的重点和基础。兹选择三例说明如下。

例 1　判别 14209 是否素数。

设 $N=14209$，$a=3$。求得 $3^{21}\equiv1(\mathrm{mod}14209)$，$d=21$。因 $21\nmid14209-1$，故 14209 不是素数。“度之不得一”。

例 2　判别 341 是否素数。

设 $N=341$，$a=2$。求得 $2^{10}\equiv1(\mathrm{mod}341)$，$d=10=2\times5$。因 $10\mid341-1$，但 $\frac{341}{1+2\times5}=31$，故 341 不是素数。“度之得一，除之恰尽”。

例 3　判别 103 是否素数。

设 $N=103$，$a=2$。求得 $2^{51}\equiv1(\mathrm{mod}103)$，$d=51=3\times17$。因 $51\mid103-1$，且 $\frac{103}{1+2\times3}$，$\frac{103}{1+4\times3}$，$\frac{103}{1+2\times17}$ 均不得整数，故 103 是素数。“度之得一，除之不尽”。

2. 天元求一法。

“法以用数之诸方积，大于本数，或大于本数之半者，与本数求得一，以其天元数为乘法，如前屡乘屡度，至得诸正数或负数而止。以不尽之方数加泛次为定次，余如前法。”

此法首先以用数诸方积 a^n 与本数 N，用秦九韶的“大衍求一术”求天元数 x，使 $a^nx\equiv1(\mathrm{mod}N)$；然后以天元数 x 为乘法，按照前述“屡乘求一法”的方式演算和判定。

事实上，由于 $a^nx\equiv1(\mathrm{mod}N)$，有 $a^{nm}x^m\equiv1(\mathrm{mod}N)$，又因 $x\equiv a(\mathrm{mod}N)$，$x^m\equiv a^t(\mathrm{mod}N)$，故有 $a^{nm}a^t\equiv1(\mathrm{mod}N)$，$a^{nm+1}\equiv1(\mathrm{mod}N)$，若令 $nm+t=d$，就得到 $a^d\equiv1(\mathrm{mod}N)$。因此，该法与第一法是等价的。

3. 小数迴环法。

“凡本数为法，以除一，皆成迴环不尽之小本数，其迴环数有正负相间者，有有正无负者，视有几位而得迴环，以其位数代前法之定次，余皆如前法。”

此法根据循环小数的循环节作判定。即对于所判定的本数

N，首先求$\frac{1}{N}$的循环节，以其循环节位数 d 作为第一、二法中所谓的“定次”，然后按照前述二法作判定。

我们知道，若 N 为素数，则$\frac{1}{N}$小数的循环节为 $N-1$ 位或 m 位，这里 $m|N-1$。这一结论曾由兰伯特(T. H. Lambert，1728—1777)于 1769 年证明。他对于素数 $N\neq 2$ 和 5 的情形，证明了$\frac{1}{N}$的循环节位数必能整除 $N-1$；同时说明，当 M 为奇数时，若$\frac{1}{M}$有 $M-1$ 位，则 M 为素数；若$\frac{1}{M}$有 m 位，且 $m|M-1$，则 M 为合数。1801 年，高斯在他的《算术研究》(Disquisitiones Arithmeticae)一书中也曾证明：有理数$\frac{1}{N}$表示成纯循环小数的充要条件是，存在自然数 p，使 $10^p\equiv 1(\mathrm{mod}N)$成立，且使其成立的最小自然数 p 是循环节长度。1892 年列维(C. T. Levi，1873—1941)又证明了定理：若 $p|10^p-1$，则 p 为素数，否则 p 为合数。

事实上，若$\frac{1}{N}=0.\overline{a_1a_2\cdots a_ma_1a_2\cdots a_m\cdots}$，则$\frac{1}{N}=\frac{\overline{a_1a_2\cdots a_m}}{10^m-1}$，即有 $N|10^m-1$，亦即 $10^m\equiv 1(\mathrm{mod}N)$。令 $m=d$，故可按第一、二术所叙方法判定。这里的用数 $a=10$，由此可见，李善兰判定定理中的用数 a 并不局限于 2 和 3，而具有任意性。

4. 准根分级法。

“多位数用此法便。法以本数减一，半之为总分，视总分为若干小数根相乘之积，以此诸根为乘次之准，乃以用数准最大之根，用超乘补乘法，乘若干次，为第一级，以本数度之，若余数为一，或为负一，则不须再乘，若不得一，则以余数准次大根，用超乘补乘法，乘若干次，为第二级，以本数度之，其余数若为一，或负一，则不须再乘，若不得一，则以余数准第三根再乘之，如此乘至总分而止。若仍不得一，则本数非数根，若诸级之末得一或

负一者，再用递加数递除本数，以定其是数根否也，若得用数之诸方积或负数者，本数非数根。若乘次未满级，末忽得一，则本数非数根，若得用数之诸方积或负数者，则视其定次，与级数不等者，非数根；等者，再用递加数定之也。”

这一方法主要用于对较大自然数 N 的素数判定。

首先对“总分”作素因数分解：$\frac{N-1}{2}=p_1p_2p_3\cdots p_n$，其中 p_1，p_2，p_3，…，p_n 为素数，且 $p_1>p_2>p_3>\cdots>p_n$。

再递求余数。

以用数准大根：$a^{p_1}\equiv r_1(\mathrm{mod}\ N)$，

以余数准次大根：$r_1^{p_2}\equiv r_2(\mathrm{mod}\ N)$，

以余数准第三根：$r_2^{p_3}\equiv r_3(\mathrm{mod}\ N)$，

…　…　…　…　…　…

以余数准第 n 根：$r_{n-1}^{p_n}\equiv r_n(\mathrm{mod}\ N)$，

于是得　$a^{p_1p_2p_3\cdots p_n}\equiv r_n(\mathrm{mod}\ N)$，即 $a^{\frac{N-1}{2}}\equiv r_n(\mathrm{mod}\ N)$。

最后作素数判定：

①若 $r_n\neq 1$ 时，则 N 不是素数；

②若 $r_n=1$ 或 -1 时则得 $a^d\equiv 1(\mathrm{mod}\ N)$，其中 $d=p_1p_2p_3\cdots p_n$ 或 $d=2p_1p_2p_3\cdots p_n$，于是可按第一、二法所叙方法判定；

③若 $r_n=a^t$ 或 $r_n=-a^t$ 时，则 N 不是素数；

④若 $r_s=1$ 时($1\leqslant s<n$)，则 N 不是素数；

⑤若 $r_s=a^t$ 或 $r_s=-a^t$ 时($1\leqslant s<n$)，当定次 $d\neq s$，则 N 不是素数；当 $d=s$，则第一、二法所叙方法判定。这里 $d=p_1p_2p_3\cdots p_s-t$，或 $d=2(p_1p_2p_3\cdots p_s-t)$。

李善兰的《考数根法》是中国第一部素数论专著，他在不了解西方的素数论研究成果的情况下，独立地获得了 Fermat 小定理的相关结果，尽管晚于欧洲，但反映了李善兰乃至中国数学家的数学能力与水平。特别是他开清末素数论研究之风，在国内外

产生一定的影响。华蘅芳在李善兰的影响下著《数根术解》，其中也讨论这一命题，但华氏对 Fermat 小定理的逆命题误以为真。

《数根丛草》，清末方士锳于 1896 年所撰，光绪二十三年(1897)鄂垣初刻。方士锳，字梅荪，湖北天门人，生卒年不详，长于舆地与数学。除此书外，方士锳另有数学著作《合数术》(1898 年上海石印本)传世。[①]

《数根丛草》在李善兰素数论基础上又提出 20 种素数判定法，将清末素数论研究推向一个新高峰。兹择其要者介绍如下。

第一术曰：

“置本数，开平方不尽，乃取略大于平方根之一个整数为数限。将一、二、三…以至数限，查其数根若干。乃以此若干个数根连乘，与本数求等，视其最小之余数为某数。如最小之余数为一，则本数为数根；否则必为本数一个乘数，以除本数，必能适尽，则本数非数根”。[②]

对于本数 N，取数限 $n=[\sqrt{N}]+1$，查数集 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中的所有素数 $\{p_1,p_2,p_3,\cdots,p_k\}$，并求 $M=\prod_{i=1}^{k} p_i$，

若 $(N,M)=1$，则 N 是素数；若 $(N,M)\neq 1$，则 N 不是素数。

第二术曰：

“命本数为巳，减一，折半得 $\left(\frac{\text{二}}{\text{巳丅一}}\right)$，为平方之限，乃自一、二、三至 $\left(\frac{\text{二}}{\text{巳丅一}}\right)$，各数自乘，以本数巳度之，所余之数，挨次列之，得一、二^{二}丅任倍巳、三^{二}丅任倍巳、四^{二}丅任倍巳、五^{二}丅任倍……

① 李俨．近代中算著述记．见：李俨、钱宝琮科学史全集．第六卷．沈阳：辽宁教育出版社，1998．513

② 方士锳．数根丛草．光绪丁酉鄂垣初刻本．以下所引术文，同此。

$\left(\frac{\text{二}}{\text{巳丅一}}\right)^{\text{二}}$丅任倍巳。其任倍巳或等于◯，或等于一、二、三、……乃视其各余数有无相同之数，如有相同之数，此数以下不必再列，复审其所同之数，为某方之余数，即以其方根为半和。又审其所同数，为某方之平方积，即以其方根为半较，乃以半较减半和，余为小乘数，或以本数为半和，即为大乘数，如以小乘数除本数，必得大乘数；如以大乘数除本数，必得小乘数；此可见有相同之余数，则本数必非数根”。

对于本数 N，以$\frac{N-1}{2}$为限数，考察 $P\equiv x(\mathrm{mod}\ N)$，$P\in A=\left\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \frac{N-1}{2}\right\}$，得到

$$x\in B=\left\{1, k_1N-1^2, k_2N-2^2, k_3N-3^2, \cdots, k_{N-1}N-\left(\frac{N-1}{2}\right)^2\right\}。$$

考虑 x 所在之序列 B 与模 N 的最小剩余系 $C=\{1, 2, 3, \cdots, N-1\}$，取 $D=B\cap C$，再取 $x_0\in D$，使是相同数之剩余数，则有

$$\begin{cases} t^2=x_0, \\ A_0^2=x_0(\mathrm{mod}\ N)。\end{cases}$$

此时取 A_0 为半和，t 为半较，有 $N=A_0t$，故 N 不是素数。

这一方法应用了二次剩余下述性质：

在模 N 的一个既约剩余系中，恰有$\frac{N-1}{2}$个模 N 的二次剩余，$\frac{N-1}{2}$个模 N 的二次非剩余；其所有二次剩余分别与序列：1^2，2^2，3^2，…，$\left(\frac{N-1}{2}\right)^2$ 中之一数同余，且仅与一数同余。

第三术曰：

“置本数巳减一，得巳丅一。任取一数甲约之，视其能否度尽，不尽，加任倍巳度之，得$\frac{\text{甲}}{\text{巳丅一丄任倍巳}}$，又度之不尽，又加任倍

已度之，得$\dfrac{\text{甲}^{\text{二}}}{(\text{已丅一})\text{丄任倍已丄任倍甲已}}$，又度之不尽，又加任倍已度之，得$\dfrac{\text{甲}^{\text{三}}}{(\text{已丅一})\text{丄任倍已丄任倍甲已丄任倍甲}^{\text{二}}\text{已}}$。如是屡度至余一而止，视甲之方指数若干，即以方指数为递加数，偶者或半之为递加数，及以递加数加一，除本数不尽，又加递加数除之，除尽者非数根，不尽者是数根（凡递加数已过本数之半而仍除不尽，则知本数是数根）。”

对于本数 N，任取整数 a，若 $a\nmid N-1$，则任取自然数 k_1，k_2，k_3，…，k_s，得到相应的数列 A_n：

$$A_0=N-1，\ A_n=\frac{A_{n-1}+k_nN}{a}，\quad (n=1，2，3，\cdots，s)$$

寻找满足条件 $A_s=1$ 或 $N-1$ 的 s。

①若 $(s+1)\mid N$，则 N 为合数；

②若 $(s+1)\nmid N$，但存在自然数 p，使 $(ps+1)\mid N$，则 N 也为合数 $\left(ps+1\leq\dfrac{N}{2}\right)$；

③若 $(s+1)\nmid N$，且对于任意自然数 p，有 $(ps+1)\nmid N$，则 N 为素数；

④若 s 为偶数，可取 $t=\dfrac{s}{2}$，按前述方式判定；

⑤若 $ps+1>\dfrac{N}{2}$，且对于任意自然数 p，有 $(ps+1)\nmid N$，则 N 为素数。

第六术曰：

“置本数加一开平方，不尽，又加一个八开之，不尽，又加二个八开之，不尽，又加三个八开之，于是屡加至开方适尽而止，乃以开得之数为半和，所加之数为半较，和较相加减，即得大小两乘数，则知本数必非数根；如果所加之平方根，已于本数折半之数相近，而仍不能开平方，或开方之数等于本数加一折半之数，则

知本数是数根。”

对于本数 N，寻找最小自然数 k，使

$$N+8k+1=A^2，且\ 8k+1=B^2，$$

即有

$$N=A^2-B^2=(A-B)\cdot(A+B)。$$

若令 $A-B=a$，$A+B=b$ $(b>a)$，即 $A=\frac{a+b}{2}$(半和)，$B=\frac{b-a}{2}$(半较)，从而 $N=ab$ 为合数。

①当 $A=\frac{N+1}{2}$ 时 $\Rightarrow N+1=a+b\Rightarrow ab+1=a+b$

$$\Rightarrow(a-1)(b-1)=0\Rightarrow a=1，$$

所以 N 为素数；

②当 B 接近 $\frac{N}{2}$ 时 $\Rightarrow b-a$ 接近于 N，即 $b-a$ 接近于 ab

$$\Rightarrow a(b+1)接近于\ b，\Rightarrow a=1，$$

所以 N 为素数。

第七术曰：

“先取略大于本数之一个平方积，与本数相减，为余实，乃以所取之平方根倍之加一，以加余实。视其能否成方积，不成，又加倍平方根加三，不成，又加倍平方根加五，于是屡加，至适成一个正方积而止。乃以所成之方根为半较，加本数开平方之根为半和，以和较相加减，即得大小两乘数，如所加之数，已近本数折半自乘之数，则不必求乘数，即知本数是数根。”

对于本数 N 及略大于 N 的幂数 m^2，寻找最小自然数 k，使

$$m^2+(2m+1)+(2m+3)+(2m+5)+\cdots+(2m+(2k-1))-N$$
$$=(m+k)^2-N=B^2-N=A^2，$$

于是　　$N=B^2-A^2=(B-A)(B+A)。$

令 $B-A=a$，$B+A=b$，$(b>a)$，即 $A=\frac{b-a}{2}$(半较)，$B=\frac{a+b}{2}$

（半和），从而 $N=ab$ 为合数。

若 B^2 接近 $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ 时 $\Rightarrow b+a$ 接近于 N，即 $b+a$ 接近于 ab $\Rightarrow a(b-1)$ 接近于 $b \Rightarrow a=1$，所以 N 为素数。

第八术曰：

“四因本数加四，开平方不尽，又加三个四，开之不尽，又加五个四，开之，于是屡加至开方适尽而止。乃以开得之根为和，所加之根为较，和较相加减，即得大小两乘数，则知本数非数根；如所加之平方根已大于本数，则知本数是数根。”

对于本数 N，寻找最小自然数 k，使

$$4N+[4+4\times3+4\times5+\cdots+4\times(2k-1)]=4(N+k^2)=A^2,$$

即 $$4N=A^2-(2k)^2=(A-2k)(A+2k),$$

于是令 $A-2k=2a$，$A+2k=2b$，$(b>a)$，即 $A=a+b$（和），$2k=b-a$（较），从而 $N=ab$ 为合数。

若所求之 $2k>N \Rightarrow b-a>ab \Rightarrow b>a(b+1)$，不等式无解，所以 N 为素数。

第九术曰：

“四因本数开平方，取其负余数为实置于上，倍方根加一，以加上位，开平方不尽，又倍方根加三，以加上位，开之，于是屡加至开方适尽而止。乃以开得之方根为和，所加之方根为较，和较相加减，可得大小两乘数，则知本数非数根；若其所加之根数已近本数，则本数是数根。”

对于本数 N，若 $4N=m^2-r$，则寻找最小自然数 k，使

$$r+\{(2m+1)+(2m+3)+(2m+5)+\cdots+[2m+(2k-1)]\}=A^2,$$

即

$$4N=m^2+\{(2m+1)+(2m+3)+(2m+5)+\cdots+[2m+(2k-1)]\}-A^2$$

$$=(m+k)^2-A^2$$
$$=B^2-A^2=(B-A)(B+A)。$$

于是令 $B-A=2a$，$B+A=2b(b>a)$，即 $A=b-a$(较)，$B=a+b$(和)，从而 $N=ab$ 为合数。

若 B 接近于 $N\Rightarrow b+a$ 接近于 N，即 $b+a$ 接近于 ab

$$\Rightarrow a(b-1)\text{接近于 } b \Rightarrow a=1,$$

所以 N 为素数。

第十二术曰：

“置本数减一，为连乘数限。乃以一、二、三以至数限各数连乘，加一为实，以本数为法，除之。除尽者是数根；不尽者非数根。”

若$(N-1)!+1\equiv 0 \pmod N$，则 N 是素数；若$(N-1)!+1\not\equiv 0 \pmod N$，则 N 不是素数。

该法即数论中著名的威尔逊(John Wilson，1741—1793)定理。①威尔逊曾就此命题与华林(E. Waring，1736—1798)讨论，1773 年由拉格朗日(J. L. Lagrange，1736—1813)证明。据数论史专家狄克逊(L. E. Dickson)认为，莱布尼兹(G. W. Leibniz，1646—1726)早在 1682 年就已提出这一结论。

第十三术曰：

“置一、二、三、四、五以至本数减一之对数，挨次加之，共得对数若干。将此对数之前一个对数，以本数之对数减之。查对数表有无此对数。有，则本数是数根；无，则本数非数根。”

对于本数 N，若 $N|(N-1)!+1 \Leftrightarrow \frac{(N-1)!+1}{N}=k$，而

$$\frac{(N-1)!}{N}<\frac{(N-1)!+1}{N}\leq\frac{(N-1)!+N}{N},$$

① 张祖贵.《数根丛草》研究. 自然科学史研究，1992，11(2)：127

故有

$$\ln(k-1)\leq\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(N-1)-\ln N<\ln k。$$

如果找到这样的 k，则 N 为素数。

显然此术是第十二术的对数形式，与其等价。

第十六术曰：

“将本数以天乘地代之，又将本数减一，以天减甲乘地加乙代之，则可得天地两同数之限。由此限即可得天地两个真同数。”

该术将判定 N 是否为素数归结为解下述一次不定方程有无整数解问题：

$$\begin{cases}N=xy,\\N-1=(x-m)(y+n),\end{cases}$$ 其中 x，y，m，n 均为自然数。

第十七术曰：

“先取略近本数之一个方根，以除本数，得数，与方根相减，为根较，余负实若干，置于下。任取一个奇数，以加方较，仍与奇数相乘，得数以减负实，视其恰尽否，不尽，又以奇数减方根为法，除本数，如前求之，至屡求恰尽而止。即以其法为小乘数，如法已为三，而仍不能尽，则知本数是数根。”

对于本数 N，取 $a=[\sqrt{N}]+1$，即 $N-a^2=-r$（余负实）。若找到奇数 $2t-1$，使

$$-r-\left[a-\frac{N}{a-(2t-1)}\right](2t-1)=0,$$

则 $N=[a-(2t-1)][a+(2t-1)]$，N 为合数。

当 $a-(2t-1)$ 递减为最小数 3 时，$-r-\left[a-\dfrac{N}{a-(2t-1)}\right](2t-1)\neq0$，则 N 为素数。

事实上，

$$-r-\left[a-\frac{N}{a-(2t-1)}\right](2t-1)$$

$$=N-a^2-\left[a(2t-1)-\frac{(2t-1)N}{a-(2t-1)}\right]=0,$$

于是有

$$N=[a-(2t-1)]\cdot[a+(2t-1)]。$$

一般说来，N 是奇数，从而 a 为偶数。

第十八术曰：

“置本数减一，折半为方准，视其内有若干乘数，先取最大之一个乘数，为约法之次数。乃置本数加一，以二约之，得数，又以二约之，不受约，又加一个本数约之，如是屡约，至适满所定之次数而止。查其余数是否为一，是则即以其次数为递加数，以除本数，不尽者是数根。否则再以次大数减一，乘最大数，为约法之次数，如前法约之，至所约之次数已满方准，仍不余一，则知其数非数根；若未满次数以前，能得余数为一，则其数亦非数根。”

对于本数 N，以 $\frac{N-1}{2}$ 为方准，将其素数分解：

$$\frac{N-1}{2}=\prod_{i=1}^{k}p_i，其中\ p_1>p_2>p_3>\cdots>p_k\ 均为素数。$$

先取最大素因子 p_1，作下述演算：

$$s_1=\frac{N+1}{2},\quad s_2=\begin{cases}\frac{s_1}{2}, & s_1=2m,\\ \frac{s_1+N}{2}, & s_1=2m-1;\end{cases}$$

$$s_{p_1}=\begin{cases}\frac{s_{p_1-1}}{2}, & s_{p_1-1}=2m,\\ \frac{s_{p_1-1}+N}{2}, & s_{p_1-1}=2m-1。\end{cases}$$

若 $s_{p_1}=1$，且 $p_1\nmid N$，则 N 为素数。

若 $s_{p_1}\neq1$，则取 $(p_2-1)p_1$ 作为约法次数，继续演算：

$$t_1=\frac{N+s_{p_1}}{2},\quad t_2=\begin{cases}\frac{t_1}{2}, & t_1=2m,\\ \frac{t_1+N}{2}, & t_1=2m-1;\end{cases}$$

$$t_i=\begin{cases}\frac{t_{i-1}}{2}, & t_{i-1}=2m,\\ \frac{t_{i-1}+N}{2}, & t_{i-1}=2m-1。\end{cases}$$

当 $i>\frac{N-1}{2}$，且 $t_i\neq 1$，则 N 为合数；

当 $i<(p_2-1)p_1$，且存在某个 i 使 $t_i=1$，则 N 也为合数。

容易证明，方氏此法实际是李善兰“准根分级法”的简化方法。

第十九术曰：

“将本数之各倍一一列于右，另以一与本数之各倍两两相加，视其得若干次复变为一。乃以其次数约本数，是否余一，否则本数非数根；是则即以其奇数倍之为递加数，加一除本数，不尽，又加一个递加数除之，如是屡如，至得数小于法，仍不尽，则知本数是数根。”

对于本数 N，选取自然数 k_1，k_2，k_3，…，k_n，使得

$$A_0=1,\ A_{i-1}+k_iN=A_i\times 10^{t_i},\ (i=1,2,3,\cdots,n)$$

其中 $A_i=\overline{a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_m}}$ 为一自然数，且 $a_{i_m}\neq 0$，$A_n=1$，于是

$$\prod_{i=1}^{n}(A_{i-1}+k_iN)=\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)\times 10^{t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n}=\left(\prod_{i=1}^{n-1}A_i\right)\times 10^{a}。$$

从而有

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}A_i\right)+f(A_j,k_i)N=\left(\prod_{i=1}^{n-1}A_i\right)\times 10^{a},$$

即

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1}A_i\right)\times(10^{a}-1)=pN,$$

其中 $t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n=a$，$f(A_j,k_i)=p$。

由于 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 均与 N 互素，故有 $10^{a}\equiv 1(\mathrm{mod}\ N)$。

这样一来，N 素数判定条件归结为 a 是否整除 $N-1$，从而变为李善兰素数判定第三法“小数回环考数根法”。

第二十术曰：

“置本数开平方，不尽，余负实，以开得之数为大方根。又以负实开平方，为小方根，余正实。倍大方根，加一，以减正实，余负实，倍小方根除之，为第一数。加于倍小方根内，以乘第一数，与负实相加，余正实，倍大方根，加三，减之，余负实，倍小方根，内加倍第一数，除之，为第二数，相加，以第二数乘之，与负实相加，余正实。又倍大方根，加五，减之，余负实。如是屡减屡加，至余实恰尽而止。如大方根已至本数六分之一，而仍不尽，则知本数是数根；如能恰尽，则以所加之大方根为半和，所加之小方根为半较，半和较相加减，即得大小乘数，则知本数非数根，合问。”

对于本数 N 与略大于 N 的自然数 m，计算

负实：$-r_1=N-m^2$，正实：$\lambda_1=l^2-r_1$，

负实：$-r_2=\lambda_1-(2m+1)$，第一数：$s_1=r_2\div 2l$(余负实)，

正实：$\lambda_2=-r_2+(s_1+2l)s_1$，负实：$-r_3=\lambda_2-(2m+3)$，

第二数：$s_2=r_3\div(2l+2s_1)$(余负实)，

正实：$\lambda_3=-r_3+(s_1+2l+2s_2)s_2$，

… … … … … …

从而

$$
\begin{aligned}
N &= m^2-r_1\\
&= m^2-l^2+\lambda_1\\
&= m^2-l^2+(2m+1)-r_2\\
&= m^2-l^2+(2m+1)-(s_1+2l)s_1+\lambda_2\\
&= m^2-l^2+(2m+1)-(s_1+2l)s_1+(2m+3)-r_3\\
&= m^2-l^2+(2m+1)-(s_1+2l)s_1+(2m+3)-(s_1+2l+2s_2)s_2+\lambda_3
\end{aligned}
$$

… … … … … … … … … …

$$=\{m^2+(2m+1)+(2m+3)+(2m+5)+\cdots+[2m+(2k-1)]\}-\{l^2+2l(s_1+s_2+s_3+\cdots+s_k)+(s_1+s_2+s_3+\cdots+s_k)^2\}+\lambda_{k+1}$$
$$=(m+k)^2-[l+(s_1+s_2+s_3+\cdots+s_k)]^2+\lambda_{k+1}$$
$$=B^2-A^2+\lambda_{k+1}。$$

寻找最小自然数 k，使 $\lambda_{k+1}=0$ 时，此时 $N=B^2-A^2=(B-A)\cdot(B+A)=ab$，$(b>a)$，即 $A=\frac{b-a}{2}$（半较），$B=\frac{a+b}{2}$（半和），从而 $N=ab$ 为合数。

当 $B+A$ 接近于 $\frac{N}{6}$ 时，$\lambda_{k+1}\neq 0$，则 N 不能表示成两数的平方差，于是 N 为素数。

综上内容，我们可以看出，方士锛的素数论研究工作可以分为以下几个方面：

1. 深化与推广了李善兰的素数判定定理，实际是围绕欧拉定理形式的几个判定方法。其第三、十四、十五术是对李善兰“屡乘求一法”的简化或推广，第十八术是对李氏“准根分级法”的简化，而其第十九术是李善兰“小数回环法”的别种形式。而且在对费尔马小定理的逆命题认识上，沿袭华蘅芳的错误，从而获得了命题不真的第十、十一术。

2. 在李善兰素数论的基础上又有所发明，独立地获得了一系列新的素数判别法。这些判别法从形式上可分为四类：

①通过系列的机械化演算以构造二次多项式，由本数 N 的可分解性来作素数判定，如第六、第七、第八、第九、第十六、第十七、第二十诸术，这是方士锛素数论工作的主体部分；

②独立获得威尔逊定理，即第十二、十三术；

③利用平方剩余及既约剩余系理论作素数判定，即第二术；

④利用素数定义进行判定，主要是第一、第四、第五术。

第六节　华蘅芳及其《行素轩算稿》

华蘅芳是晚清数学界继李善兰后之集大成者，数学著述与翻译均称丰富。除与傅兰雅、玛高温等人编译西学外，数学研究成果亦不乏佳作。著有《开方别术》一卷(1872)、《开方古义》二卷(1880)、《数根术解》一卷(1882)、《积较术》三卷(1882)、《学算笔谈》十二卷，1882年又撰《算法须知》一卷，发表于傅兰雅主编的《格致须知》。1882年汇刻《开方别术》、《开方古义》、《数根术解》、《积较术》、《学算笔谈》(六卷)五种，题称《行素轩草稿》。1893年又续刻《行素轩草稿》，其中含后续《学算笔谈》六卷，以及《算草丛存》八卷，《丛存》包括：一、"三角测量说"，"抛物线说"；二、"垛积演较"；三、"盈朒广义"，"积较客难"；四、"诸乘方变式"，"台积术解"，"青朱出入图说"；五、"求乘数法"；六、"数根演古"；七、"循环小数考"；八、"算斋琐语"。另有《西算初阶》一卷。

《算法须知》与《学算笔谈》乃为"嘉惠后学"而编，内容浅近。《学算笔谈》之目如下。

一、"总论算法之理，识数之法，记数之法，加法，减法，乘法，除法"

二、"公度数，公倍数，命分法，约分法，通分法，加分法，减分法，乘分法，除分法"

三、"十分数，小数，小数加法，小数减法，小数乘法，小数除法，循环小数"

四、"开方论，开平方法"

五、"论加减乘除开方之用，论看题之法，论驭题之法，论观书之法，论学算之法，论比例之用，论盈朒之术与天元相似"

六、"论天元，论天元开方"

七、“论方程之术已寓四元之意，论四元，论天元四元不便之处”

八、“代数释号，代数加减乘除之法，论相等之式，变化相等之式，求平方式所能有之各根，求立方式所能有之各根”

九、“论代数中助变之数，论代数中虚代之法”

十、“论微分”

十一、“论积分，论合名微分”

十二、“论各种算学不外乎加减乘除，论一切算稿均宜笔之于书，论算学中可以著书之事，论学算与著书并非两事，论翻译算学之书，近代畴人著述记”

华蘅芳的数学研究工作主要集中在以下三个方面。

一、方程论研究

《开方别术》、《开方古义》以及《诸乘方变式》是关于方程论的著述。

在《开方别术》中，他根据“凡开方之实，必为诸数根连乘之积，而开得之元数，必即实中一数根或即实中若干数根相乘之数”，以及诸数根 1，2，3，…，9 各数的各幂数“尾数”必呈循环出现的规律，先推求根的“尾数”，再确定根的可能位数，从而独创了数根开方法，即“求尾定位”试商法。

“凡以元之诸乘方式之从、廉、隅、诸数并之，必与实之数正负相当，则以元之诸乘方之单位数乘从、廉、隅之单位数并之，亦必与实之单位数正负相当。”

“法用自一至九之九个单位数各取其诸乘方之单位数，与从、廉、隅之单位数并列而对乘之，取其单位之数并之，仍取其单位数与实之单位数相课，则必有一数或几数正负相适，相当者则记其所用之单位数为元之尾位。”

如求方程$-x^4+20x^3-66x^2+60x-2925=0$的整数根，首先根据自然数 1，2，3，…，9 的诸乘方幂个位数的循环规律列出尾

位数表：

表 4.1.5　x^k 尾位数表

	x^4	x^3	x^2	x
$x=1$	1	1	1	1
$x=2$	6	8	4	2
$x=3$	1	7	9	3
…	…	…	…	…
$x=7$	1	3	9	7
$x=8$	6	2	4	8
$x=9$	1	9	1	9

再以数表中相应的尾位数与方程系数的尾位数相乘，并求其代数和，得到$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$的尾位数，即

$x=\cdots1$　　$-1\times1+0\times1-6\times1+0\times1=-7$；

$x=\cdots2$　　$-1\times6+0\times8-6\times4+0\times2=0$；

$x=\cdots3$　　$-1\times1+0\times7-6\times9+0\times3=-5$；

…　…　…　…　…　…

$x=\cdots7$　　$-1\times1+0\times3-6\times9+0\times7=3$；

$x=\cdots8$　　$-1\times6+0\times2-6\times4+0\times8=3$；

$x=\cdots9$　　$-1\times1+0\times9-6\times1+0\times9=5$；

又因实 2925 的尾位数是 5，故商 x 的尾位数是 3，或 5，或 9。再由李锐《开方说》之“廉隅超步法”确定商的位数，可知商的位数为一位或二位。

因 $2925=1\times3\times3\times5\times5\times13$，则商 $x\in\{3,5,9,13,15,25,39,45,65\}$，逐一试之，得商 $x=15$。

华氏此以素数分解法开诸乘方，确有创见。对于常数项绝对

值较大的方程求解十分有效。故李善兰氏在《开方别术》序中赞誉道："此法并诸商为一商，故无翻积、益积，不特生面独开，且较旧法简易十倍。"

《诸乘方变式》讨论方程变换。记方程

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0 \qquad (a)$$

之根为 x_1，x_2，x_3，…，x_{n-1}，x_n。华蘅芳获得以下命题。

1. "凡正负诸乘方式以两本式任参差几层相加，其元不变。"

2. "凡正负诸乘方式以两本式任参差几层相减，其元不变。"

即方程(a)的根必然也是方程：$x^kf(x)\pm f(x)=g(x)=0$ 的根。

3. "凡正负诸乘方式任如何剔分为两式，各自乘（再乘、三乘亦同）相消，其元不变。"

若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=0$，则方程(a)的根必是方程 $f_1{}^k(x)\pm f_2{}^k(x)=0$ 的根。

4. "凡正负诸乘方式，若每两层之间加一空层，则其元变为元之平方根，（若加两层空层，其元变为元之立方根，余类推）。"

若令 $x=y^k$，则 $y_i=\sqrt[k]{x_i}$ 为方程 $f(y)=0$ 的根。

5. "凡正负诸乘方式有空层相间者，若去其空层，则其元变为本元之自乘数。"

若令 $x=\sqrt[k]{y}$，则 $y_i=x_i{}^k$ 为方程 $f(y)=0$ 的根。

6. "凡正负诸乘方式，若颠倒之，以实为隅，以隅为实，则其元母变为子，子变为母。"

若 α 为方程(a) 的根，则 $\beta=\alpha^{-1}$ 为方程

$$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根。

7. "凡正负诸乘方式，若以两本式一正一倒，任如何参差相减，其元均变为一。"

8. “凡正负诸乘方式，若以两本式一正一倒，任如何参差相加，而成偶层之式，则其元均变为负一。”

若 $m=n+k$，并由互为倒根方程 $f(x)$，$g(x)$构成方程：

$$F(x)=x^k f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i=0, \qquad \text{(b)}$$

则　①当 $b_{m-i}=-b_i$ 时，$x=1$ 是方程(b)的根；

②当 $b_{m-i}=b_i$，且 m 为奇数时，$x=-1$ 是方程(b)的根。

9. “凡正负诸乘方式，其隅为一者，则隅上一层必为各元相加之数而反其正负；再上一层，则为各元两两相乘之和；再上一层，则为各元三三相乘之和而反其正负；再上一层，则为各元四四相乘之和；多层者依此类推（每间一层反其正负）。”

此即 Vieta 定理：若方程

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}\cdots+a_1x+a_0=0 \qquad \text{(c)}$$

的根为 x_1，x_2，x_3，…，x_{n-1}，x_n，则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=-a_{n-1},\quad \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} x_i x_j=a_{n-2},$$

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n} x_i x_j x_k=-a_{n-3},\ \cdots,\ \prod_{i=1}^{n} x_i=(-1)^n a_0.$$

10. “凡正负诸乘方式，其隅为一者，则以隅之上一层数自乘，两倍其再上一层之数以减之，则为各元平方之和。”

即对于方程(c)，有

$$a_{n-1}^2-2a_{n-2}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2。$$

11. “凡正负诸乘方式，其隅为一者，以层数减一之数约其隅上一层之数，反其正负，以之为商数，如常法开之，则其变讫之式，隅上之一层为空位，而其元亦少去所商之数。”

即对于方程(c)，若令 $x+\frac{a_{n-1}}{n}=y$，则有

$$f\left(y-\frac{a_{n-1}}{n}\right)=y^n+b_{n-1}y^{n-1}+b_{n-2}y^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0=0,$$

且其根为 $y_i=x_i+\frac{a_{n-1}}{n}$。

对于根与系数的关系，汪莱《衡斋算学》第五册讨论了三次方程的情形，一般情形的叙述则见于华蘅芳与傅兰雅的译著《合数术》(1887)卷十。关于方程变换，在李锐的著述中也有系统讨论，华蘅芳的上述工作实际上是他兼收中西之学对清代方程论的发展。

《开方古义》论数字方程之开方，华氏将贾宪三角改为

1	1	1	1	1	1
5	4	3	2	1	
10	6	3	1		
10	4	1			
5	1				
1					

以上表乘各乘方式中实、方、廉、隅之数，即得余式。其开诸乘方术曰：

“取图中之数从一起至本乘方之层为止，齐其行而横列之，亦横列其实、方、廉、隅，直乘图数之各行，乘讫，依横行相加书于左，为余式。记开得一数于下。再将余式求之如前，记其共开得二数于下。如是屡求，至实尽而止，则其共开之数，即为所求之数。方、廉、隅应进退其位者，进退讫，乃乘之，其开得之数亦必随方进退。实不尽者如常法命分之。”

如对 $5x^4-3x^3-12x^2-9x-503334=0$ 开方求 $x=18$，令 $x=10y$，得

$50000y^4-3000y^3-1200y^2-90y-503334=0$，而 $y=1$。

以上表乘之，即以

(1)	50000	−3000	−1200	−90	−503334
乘(2)	1	1	1	1	1
	4	3	2	1	
	6	3	1		
	4	1			
	1				

得

−457624	50000	−3000	−1200	−90	−503334
188510	200000	−9000	−2400	−90	
289800	300000	−9000	−1200		
197000	200000	−3000			
50000	50000				

由上所得，退位如前，得 $5x^4+197x^3+2898x^2+18851x-457624=0$，于是续商 8。

华蘅芳认为，开方古法如此，但其求商之法，乃以 1 递求，且助之以表，十分繁琐。实际上古法开方并非如此，而且华氏此法不及秦九韶正负开方术便利。

二、有限差分研究

华蘅芳的有限差分研究主要反映在其《积较术》、《垛积演较》、《盈朒广义》以及《积较客难》诸书中。

所谓“积较者，列各积相较，复列各较相较，复列各较之较相较，必至无较，乃止。”其积乃指幂积 $\{x^n\}$，或诸乘方积 $\left\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}\right\}$，或垛积 $\{C_{n+x-1}^{n}\}$。由此可见，华蘅芳的积较概念即今之差分概念。不过，华氏规定各积为同次(同方)，并且等间距(“长率必为相等之数”)。

《积较术》卷一首先“论积较之理”，提出差分下列基本性质：

1. “凡较数之次数，恒如其方之指数”。

即，x^n 有 n 次较数，且 $\Delta^n(x^n)=n!$。

2. “诸乘方和较之积，其较数之次数，恒如其最大之方之指数。”

即，$\sum\limits_{i=0}^{n}a_i x^{n-i}$ 的差分次数为 n。

3. “同方之各积任若干倍之，则其各较亦大若干倍”。

即，$\Delta^k(px^m)=p(\Delta^k x^m)$。

4. “不同方之各积，其积数若相加(减)，则其较数亦相加(减)”。

即，$\sum\limits_{i=0}^{n}a_i x^{n-i}$ 的 k 阶差分为 $\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\Delta^k x^{n-i}$。

5. “末次之较数，各行必相同”。

即，若 y_n 是 m 阶差分函数，则 $\Delta^m y_n=0$。

其次“求各种公式”，根据下面差分表

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & a_n & \cdots & a_{-2} & a_{-1} & a & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \cdots \\
\cdots & b_n & \cdots & b_{-2} & b_{-1} & b & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & \cdots \\
\cdots & c_n & \cdots & c_{-2} & c_{-1} & c & c_1 & c_2 & \cdots & c_n & \cdots \\
\cdots & d_n & \cdots & d_{-2} & d_{-1} & d & d_1 & d_2 & \cdots & d_n & \cdots \\
\cdots & e_n & \cdots & e_{-2} & e_{-1} & e & e_1 & e_2 & \cdots & e_n & \cdots \\
\cdots & f_n & \cdots & f_{-2} & f_{-1} & f & f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \cdots \\
\cdots & g_n & \cdots & g_{-2} & g_{-1} & g & g_1 & g_2 & \cdots & g_n & \cdots
\end{array}$$

推演插值公式。由差分表归纳出下列关系：

$$a_k=a_{k-1}+b_k,$$

$$a_{-k}=b_{-k+1}-b_{-k+1},$$

$$b_k=b_{k-1}+c_k,$$

$$b_{-k}=b_{-k+1}-c_{-k+1},$$

$$c_k=c_{k-1}+d_k,$$

$$c_{-k}=c_{-k+1}-d_{-k+1},$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

其中($k=1$，2，3…，n)，得到插值多项式

$$a_n=a+nb+\frac{n(n+1)}{2!}c+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}d+\cdots$$
$$b_n=b+nc+\frac{n(n+1)}{2!}d+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}e+\cdots$$
$$c_n=c+nd+\frac{n(n+1)}{2!}e+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}f+\cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$a_{-n}=a-nb+\frac{n(n-1)}{2!}c-\frac{n(n+1)(n-2)}{3!}d+\cdots$$
$$a_{-2n}=a-2nb+\frac{2n(2n-1)}{2!}c-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!}d+\cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$a_{-pn}=a-pnb+\frac{pn(pn-1)}{2!}c-\frac{pn(pn-1)(pn-2)}{3!}d+\cdots$$

事实上，华蘅芳获得并证明了下列差分基本定理：

设 $y_n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$ 为 n 次多项式，$\Delta^k y_0$ 是其“0边积较”($k=0$，1，2，3，…，n)，则对 y_n 的任意 k 阶差分，有

$$\Delta^k y_n=\sum_{i=0}C_{n+i-1}^{i}\Delta^{k+i}y_0。\qquad (n\in\mathbf{Z})$$

它与牛顿差分公式在形式上是一致的。[①] 华氏又设若干问题以明上述各式之应用。

对于 n 次多项式 $f_n(x)$，则必然存在惟一的一组常数 p_0，p_1，p_2，…，p_n，使

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}p_kC_{x+k-1}^{k},$$

① 纪志刚．华蘅芳的有限差分研究．见：数学史研究文集，第一辑．呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1990．153

这里的 C_{x+k-1}^{k} 为差分多项式。华蘅芳称系数 p_k 为 $f_n(x)$ 的“0 边积较”。

《积较术》卷二“论造表用表之法”，利用差分表构造差分多项式的系数 p_k 表，这里的 $f(x)=x^n$，差分表中首项(下图画斜线者)或加负号者即其系数。如

平方积：

…	16	9	4	1	0
…	7	5	3	1	
…	2	2	2		

立方积：

…	64	27	8	1	0
…	37	19	7	1	
…	18	12	6		
…	6	6			

如此逐一求各乘方积差分，得到下列“诸乘方正元积较表”：

表 4.1.6

x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	
254	−126	62	−30	14	−6	2		
−5796	1806	−540	150	−36	6			
40824	−8400	1560	−240	24				
−126000	16800	−1800	120					
191520	15120	720						
−14120	5040							
40320								

即乘方幂 $x^n=\sum_{k=0}^{n}h_k^n C_{x+k-1}^k$ 的差分多项式系数 $p_k=h_k^n$。如 $n=3$ 时，

$$\begin{aligned}x^3 &= h_0^3C_{x-1}^0+h_1^3C_x^1+h_2^3C_{x+1}^2+h_3^3C_{x+2}^3\\ &= 0\times C_{x-1}^0+1\times C_x^1-6\times C_{x+1}^2+6\times C_{x+2}^3,\end{aligned}$$

并得到“诸乘方负元积较表”，即 $(-x)^n=\sum_{k=0}^{n}l_k^nC_{x+k-1}^k$ 的差分多项式系数 l_k^n。当 n 为奇数时，$l_k^n=(-1)^kh_k^n$；当 n 为偶数时，$l_k^n=h_k^n$。

又 $C_{x+n-1}^n=\sum_{k=1}^{n}H_k^nx^k$，华氏由“诸乘方积较表”得出系数 H_k^n 之表，即“积较还原表”：

表 4.1.7

0	1						
1	0	$\frac{1}{1}$					
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
3	0	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$			
4	0	$\frac{6}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$		
5	0	$\frac{24}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{1}{120}$	
6	0	$\frac{120}{720}$	$\frac{274}{720}$	$\frac{225}{720}$	$\frac{85}{720}$	$\frac{15}{720}$	$\frac{1}{720}$

“诸乘方积较表”与“积较还原表”是华蘅芳差分理论中最基本的两个计数函数，他的一切差分算法都是它们的应用。

华蘅芳利用此“诸乘方积较表”求“0 边积较”，如已知积

$$f(x)=x^3-112x^2+947x-2060,$$

求 $\Delta^kf(0)(k=0，1，2，3)$。

首先用“诸乘方积较表”

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \\ -6 & 2 & & \\ 6 & & & \end{array}\right|$$

乘 $f(x)$ 的对应的系数，得

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -2060 \\ 1 & 112 & 947 & \\ -6 & -224 & & \\ 6 & & & \end{array}\right| \text{同行相并得：} \left|\begin{array}{r} -2060 \\ 1060 \\ -230 \\ 6 \end{array}\right|$$

于是，$f(0)=-2060$，$\Delta f(0)=1060$，$\Delta^2 f(0)=-230$，$\Delta^3 f(0)=6$。

反之，又利用此表，由 $\Delta^k f(0)$ 反求 $f(x)$。

华蘅芳又用差分方法求高次方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根。他首先求 $f(x)$ 的“0边积较” $\Delta^k f(0)$ 以列出 $f(x)$ 的差分表 $(x=0, 1, 2, 3, \cdots)$。若 $f(i)=0$，则 i 是方程的根；若 $f(0), f(1), f(2), \cdots, f(i)$ 同号，且 $f(i+1)$ 出现异号，则方程在 $(i, i+1)$ 上存在一根，得到根的第一位数字，此时以 $\Delta^k f(i)$ 为“0边积较”，返求 $f_1(x)$，再对 $f_1(x)$ 按上述步骤求根的第二位数字，依此进行，可以求出根的各位数字。如解三次方程 $f(x)=x^3-190x^2-2627x-2436=0$，按下面步骤演算：

1. 因常数项数字较大，故先对其进行倍根变换，即令 $x=100y$，得到

$$F(y)=1000000y^3-1900000y^2-262700y-2436=0,$$

2. 求 $F(y)$ 的“0边积较”，得

$$F(0)=-2436, \qquad \Delta F(0)=2637300,$$

$$\Delta^2 F(0)=-9800000, \quad \Delta^3 F(0)=6000000,$$

构成下列步长为100的差分表

9109464	−127836	−1165136	−2436
9237300	1037300	−1162700	2637300
8200000	2200000	−3800000	−9800000
6000000	6000000	6000000	6000000
			边数
300	200	100	0

于是 $F(y)$ 在(200，300)内有一根。再以200为"0边"求得

$$F_1(y)=y^3+410y^2+41373y-127836=0,$$

3. 再求 $F_1(y)$ 的"0边积较"，得

$$F_1(0)=-127836,\ \Delta F_1(0)=40964,$$

$$\Delta^2 F_1(0)=814,\ \Delta^3 F_1(0)=6,$$

又列 $F_1(y)$ 的步长为1的差分表：

0	−43442	−86052	−127836
43442	42610	41784	40964
832	826	820	814
6	6	6	6
			边数
203	202	201	200

至此，得到原方程的根为 $x=203$。

尽管华氏这种开方法比秦九韶正负开方法繁琐，但他将方程求解与差分理论联系起来可谓别开生面，是对中国传统代数学的新发展。

《积较术》卷三"论各种垛积"，根据差分与垛积求和的逆运算关系，将积较术施诸各种垛积求和问题。首先由"诸乘方正元积较"得到"三角诸乘垛" $\sum_{x=1}^{m} x^n$ 之"积较"与各垛积 $\sum_{n=1}^{m} C_n^k$ 之"积较"。再利用"积较还原表"，由各阶积较 $\Delta^k f(0)$ 求垛积和。华蘅芳得到下述诸垛积公式：

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} h_k^n C_{x+k-1}^k,$$

$$\sum_{x=1}^{m} x^n = \sum_{k=1}^{n} h_k^n C_{m+k}^{k+1},$$

$$D_p^n(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k^n C_{x+k+p-2}^{k+p-1}。$$

其中 $D_p^n(x)$表示“乘方各乘垛”。

《垛积演较》以积较术演垛积问题，利用“积较还原表”解《四元玉鉴》中的垛积问题，其中解“茭草形段”七题，“如象招数”五题，“果垛叠藏”十七题。

《盈朒广义》将积较术施诸盈不足与勾股问题，利用“积较还原表”以差分法解《九章算术》中勾股问题。《积较客难》则是关于积较术的通俗说明，以答学者对积较术之质疑。书中还将差分法施行于三角函数的计算，依据公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

通过插值点 $x=0', 1', 2', 3', \cdots, 59', 60'$，用其积较术求出精确到 10^{-10}位的 $\sin x$ 的值。从而华氏积较术不仅局限于多项式函数，而且用于三角函数。

华蘅芳的积较术是继李善兰、夏鸾翔之后，对中国垛积招差术的新发展。

三、素数论研究

《数根术解》、《求乘数法》及《数根演古》诸书主要是华蘅芳的素数论研究成果。《数根术解》称：

“李氏秋纫有考数根之捷术曰：以本数乘二之对数，求得其真数，减二，余以本数度之，能度尽者，本数为数根；不能度尽者，本数非数根。”①“此术虽为考数根之公法，惟所设之数若太大，则

① 这是李善兰早期的看法。见：韩琦．李善兰中国定理之由来及其反响．自然科学史研究，第18卷第1期(1999)．李氏后来已经改正．见氏之《考数根法》．

乘二之对数已为极多位，真数之对数不能检表而得真数，若用对数求真数法求之，演算亦非易事，故用之仍觉不便。”

因此他在《数根术解》中试图给予改进。他首先举“减数增乘之诸尖堆”C_n^k 以及“诸乘尖堆”C_{n+k-1}^k，以说明连续 k 个自然数之积能够被 $k!$ 整除。n 称为本数，k 为乘数。

“无论何数以本数累多加减一数乘之，以一累多加一数除之，各求至若干次，则得数必为整数。”

设 n，k 为自然数，则尖堆

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

$$C_{n+k-1}^k=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}$$

也为整数。

“如本数为数根，则本数必皆能度尽小于本数之乘数各尖堆。”

若 p 为素数，则 C_p^1，C_p^2，…，C_p^{p-1} 均能被 p 除尽。如果 $1\leq k\leq p-1$，则有

$$k!\ |p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)。$$

但$(k!,p)=1$，故 $k!\ |(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)$，这样有$p|C_p^k$。

“减数增乘之诸尖堆，其总积加一之数，等于廉法表横层之总数。”

又因 C_p^1，C_p^2，…，C_p^{p-1} 为贾宪三角形之中藏诸廉，故

“凡求廉法表横层之总数，以一加倍至层数减一之次数即得。”

“置廉法表横层之总数，减去二，即自一乘起以至比本数少一乘之减数增乘之诸尖堆积总数。”

即 $\sum\limits_{k=1}^{p-1}C_p^k=2^p-2$。

由 $p|\sum\limits_{k=1}^{p-1}C_p^k$，得到 $p|2^p-2$(p 为素数)。

这一证明方法与欧拉证法颇相一致。

华蘅芳误以为费尔马小定理的逆命题为真，故其判别法有误。

“能度尽者，本数为数根”命题不真。即满足 $p|2^p-2$ 的整数 p 未必是素数。

对于整数的素数分解性质，《数根术解》首先予以叙述，获得以下主要命题：

1. 偶素数仅有一个 2；
2. 奇素数有无穷个；
3. 奇数的素因子有大于其平方根者，又有小于其平方根者。

《求乘数法》提出整数分解及判定素数 p 和 p^2 的方法，并对 200 以内的奇数逐一进行演示。《数根演古》首先以《孙子算经》“物不知数”为例，对于同余式组的 48 组不同模数和不同余数情形，逐一演算出同余式组最小整数解 N，并判定其是否为素数。得出 4 组结果不是素数，44 组结果是素数。又用“累加衍母”之法求得 1000 以内的素数。这些工作属于素数分布研究。

第七节　纵横图与镶衔问题

纵横图即现今所谓的幻方。宋朝杨辉称其为纵横图，在各名为最早。①

洛书数为最古的三阶纵横图①（如图 4.1.1）。宋朝杨辉在其《续古摘奇算法》卷上列有“四四图、五五图、六六图、七七图、六十四图、九九图、百子图、聚五图、聚六图、聚八图、攒九图、八阵图、连环图”共十三种十八个纵横图，均未说明图的造法。宋朝丁易东在其所撰的《大衍索

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 4.1.1

① 李俨. 中算家的纵横图研究. 见：李俨. 中算史论丛. 第一集. 北京：中国科学院出版，1954. 175

隐》三卷中也列出了一些纵横图，明朝王文素在其所著《新集通证古今筭学宝鉴》中亦载有纵横图数种。明朝程大位在其所著《新编直指筭法统宗》的最末一卷载有纵横图十四种，多与杨辉的图相同。清代的数学著作中最早记载有纵横图的，是方中通所著的《数度衍》。在该书卷首的“九九图说”后附有纵横图十四种，是出于《筭法统宗》。后来，新安张潮（字山来，1650—?）在《心斋杂俎》卷下第二种之内有《筭法图补》十七页，载有二十四个纵横图。张潮说：“《筭法统宗》所载十有四图。纵横斜正，无不妙合自然，有非人力所能为者，大抵皆从洛书悟而得之。内惟百子图，于隅径不能合，因重加改定，复以意增布杂图，亦皆有自然之妙。乃知人心与数理相为表里，引而伸之，当犹有不尽于此者，姑即其已然者列于后。”[①] 此后一百多年间，无人讨论有关纵横图的内容。至保其寿的《增补筭法浑圆图》之后，才又有对纵横图的讨论。

保其寿，字似仙，一字穉存，南通人，在自著的《碧奈山房集》内收有《增补筭法浑圆图》，他将平面的纵横图推广到立体的情形。现举数例如下。

瓜瓞图

每面二十一数，十四子作三十二子用。

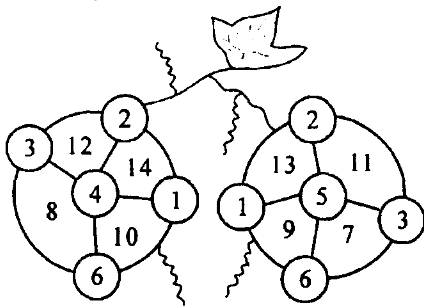


图 4.1.2

① 李俨．中算家的纵横图研究．见：李俨．中算史论丛．第一集．北京：中国科学院出版，1954．202

三图本一图

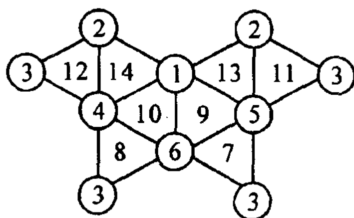


图 4.1.3

六合立方

凡六面，每面十八数，八子作二十四子用。

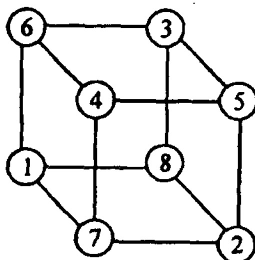


图 4.1.4

立方

每面二十六数，十二子作二十四子用。

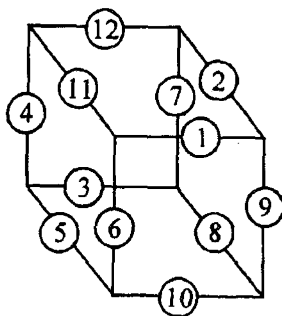


图 4.1.5

立方

每面一百八十二数，三十二子作七十七子用。

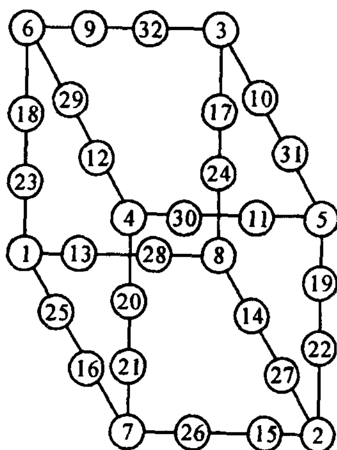


图 4.1.6

浑三角

每线十三数，每面三十九数，十二子作二十四子用。

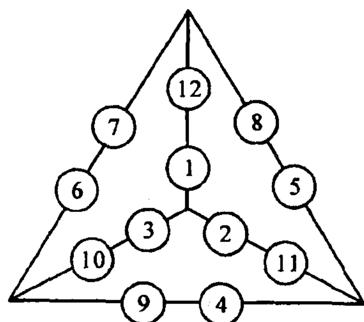


图 4.1.7

浑三角

每面十四数，八子作十六子用。

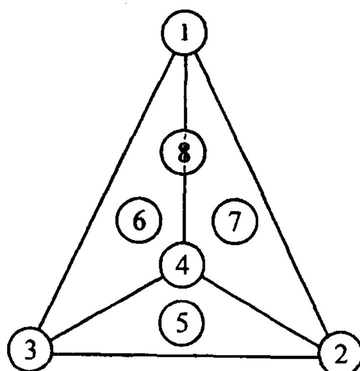


图 4.1.8

浑三角

面各七十二数，十六子作三十六子用。

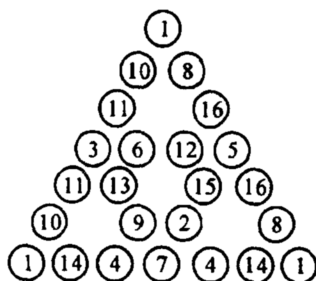


图 4.1.9

浑三角

面各二十二数。

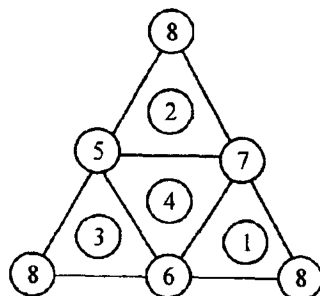
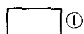


图 4.1.10

①

面各四十八数，十八子作四十八子用，
如以一换十八，二换十七，逐子相易，即成每面六十六数。

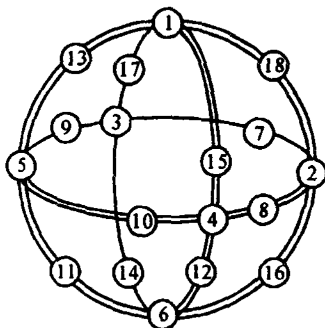


图 4.1.11

六合浑圆
每面七十九数，三十二子作七十二子用。

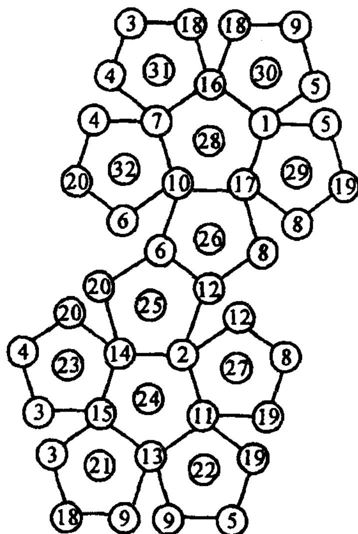


图 4.1.12

杨辉以来中算家绘制的各种幻方图，形式渐趋多样和复杂，它们的组合学内蕴有待进一步研究。

镶符问题，也称移棋问题、移珠问题等，是一个中国古代的组合数学问题。

从现在发现的史料来看，最早记载移棋问题的是清朝康熙年间出版的褚人获（字勾稼）所著的《坚瓠集》。② 书中说："幼时见

① 此图无名目。

② 胡著信. 镶符问题的历史渊源和现代发展. 见：吴文俊主编. 中国数学史论文集(二). 济南：山东教育出版社，1986. 56

友人胡砺之将黑白棋子各三枚左右分列，三移则黑白相间。余因问曰：多亦可移乎？砺之曰：自三以至于十外，皆可移。多一子则多一移。”这就是说，将黑白棋子各三枚左右分列排成一行，每次移动相邻两子，经过三次移动即可使棋子黑白相间。对于四对、五对以至于多对棋子，都可将它们移为黑白相间的情形，只是每多一对棋子，就要多移一次。该书还载有作者自编的从三对到十对棋子的移法歌诀。根据歌诀，我们可以得到如下的变易图：

(i) 三对，初态：
一移后：
二移后：
三移后：

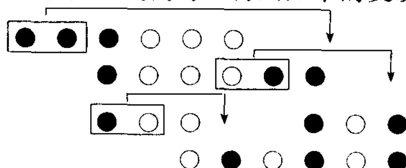


图 4.1.13

用现代数学式子表示出来就是

$$(2,2,2,1,1,1,0,0,0,0)\xrightarrow{T_1T_1T_4}(0,0,0,0,1,2,1,2,1,2)。$$

其中 0 代表空位，1 代表白子，2 代表黑子。也可将其写为

$$(2^3,1^3,0^4)\xrightarrow{T_1T_1T_4}(0^4,(1,2)^3)^{①}$$

或

$$T_1T_1T_4(2^3,1^3,0^4)=(0^4,(1,2)^3)。$$

(ii)四对，初态：
一移后：
二移后：
三移后：
四移后：

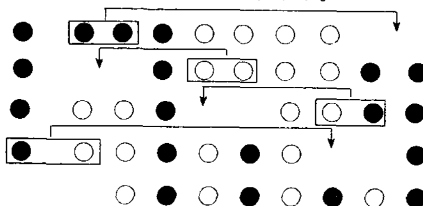


图 4.1.14

① 此处用了向量(或棋列、数列)的指数写法。例如，$(\overbrace{a,\cdots,a}^{n\text{个}},\overbrace{b,\cdots,b}^{m\text{个}})$可以记为$(a^n,b^m)$，$(\overbrace{a,b,a,b,\cdots,a,b}^{n\text{对}})$，即$(\overbrace{(a,b),\cdots,(a,b)}^{n\text{个}})$可以记为$((a,b)^n)$。

表示成现代数学式子就是：

$$T_5T_{-1}T_{-1}T_5(2^4,1^4,0^2)=(0^2,(1,2)^4)。$$

其中T_5表示将相邻两子向前（右）跳过5个棋子而镶入空格的变换①，T_{-1}表示将相邻两子向后（左）跳过1个棋子的镶变。一般的镶变T_k和T_{-k}的意义可类推。

从五对到十对棋子的移法歌诀可写成如下的式子：

五对：$T_7T_{-3}T_1T_{-4}T_7(2^5,1^5,0^2)=(0^2,(1,2)^5)$。

六对：$T_9T_{-1}T_{-3}T_2T_{-4}T_9(2^6,1^6,0^2)=(0^2,(1,2)^6)$。

七对：$T_{11}T_{-5}T_1T_{-3}T_4T_{-7}T_{11}(2^7,1^7,0^2)=(0^2,(1,2)^7)$。

八对：$T_{13}T_{-3}T_{-3}T_5T_{-6}T_3T_{-6}T_{13}(2^8,1^8,0^2)=(0^2,(1,2)^8)$。

九对：$T_{15}T_{-11}T_5T_{-1}T_5T_{-8}T_5T_{-9}T_{15}(2^9,1^9,0^2)=(0^2,(1,2)^9)$。

十对：$T_{17}T_{-1}T_{-9}T_5T_{-3}T_6T_{-9}T_5T_{-8}T_{17}(2^{10},1^{10},0^2)=(0^2,(1,2)^{10})$。

书中未载十对以上棋子的移法。

以后，清代经学家俞樾也研究过这个问题。他在《春在堂随笔》中记录了从三对到二十对棋子的移法。其中的由三对到十对的移法与《坚瓠集》中所载相同，从十一对到二十对的移法用现代数学形式可表述如下：

$$T_{19}T_{-15}T_{11}T_{-5}T_1T_{-3}T_8T_{-11}T_7T_{-11}T_{19}(2^{11},1^{11},0^2)=(0^2,(1,2)^{11})。$$

$$T_{21}T_{-1}T_{-13}T_7T_{-3}T_5T_{-6}T_9T_{-13}T_7T_{-10}T_{21}(2^{12},1^{12},0^2)=(0^2,(1,2)^{12})。$$

$$T_{23}T_{-19}T_9T_{-5}T_9T_{-5}T_9T_{-12}T_9T_{-13}T_9T_{-13}T_{23}(2^{13},1^{13},0^2)=(0^2,(1,2)^{13})。$$

---

① 有的论著称其为“镶变”。

$T_{25}T_{-1}T_{-17}T_{13}T_{-9}T_{5}T_{-3}T_{6}T_{-9}T_{13}T_{-17}T_{9}T_{-12}T_{25}(2^{14},1^{14},0^{2})$ $=(0^{2},(1,2)^{14})$。

$T_{27}T_{-23}T_{19}T_{-13}T_{9}T_{-5}T_{1}T_{-7}T_{16}T_{-13}T_{9}T_{-15}T_{11}T_{-15}T_{27}(2^{15},$ $1^{15},0^{2})=(0^{2},(1,2)^{15})$。

$T_{29}T_{-1}T_{-21}T_{15}T_{-11}T_{7}T_{-3}T_{9}T_{-10}T_{7}T_{-11}T_{17}T_{-21}T_{11}T_{-14}T_{29}$ $(2^{16},1^{16},0^{2})=(0^{2},(1,2)^{16})$。

$T_{31}T_{-27}T_{23}T_{-19}T_{13}T_{-9}T_{5}T_{-1}T_{9}T_{-16}T_{19}T_{-15}T_{9}T_{-17}T_{13}T_{-17}T_{31}$ $(2^{17},1^{17},0^{2})=(0^{2},(1,2)^{17})$。

$T_{33}T_{-1}T_{-25}T_{21}T_{-17}T_{13}T_{-7}T_{3}T_{-7}T_{14}T_{-11}T_{7}T_{-13}T_{21}T_{-25}T_{13}$ $T_{-16}T_{33}(2^{18},1^{18},0^{2})=(0^{2},(1,2)^{18})$。

$T_{35}T_{-31}T_{27}T_{-23}T_{19}T_{-13}T_{9}T_{-5}T_{1}T_{-7}T_{16}T_{-19}T_{23}T_{-17}T_{9}T_{-19}T_{15}$ $T_{-19}T_{35}(2^{19},1^{19},0^{2})=(0^{2},(1,2)^{19})$。

$T_{37}T_{-1}T_{-29}T_{25}T_{-21}T_{15}T_{-11}T_{7}T_{-3}T_{9}T_{-14}T_{17}T_{-13}T_{7}T_{-15}T_{25}$ $T_{-29}T_{15}T_{-18}T_{37}(2^{20},1^{20},0^{2})=(0^{2},(1,2)^{20})$。

虽然从这些移法中尚不能得出一般的移法公式，并且书中也未说明这些是否为次数最少的移法，但这毕竟对镶符问题的研究作了推广，也给后人提供了有益的参考。

镶符问题形式多样，至今仍在民间流传，但其起源目前还不清楚。这种游戏实际上是一个在某种特定的规则下，将一种序列重新组合为另一种序列的数学问题。在计算机科学迅猛发展的今天，这个问题重又引起了人们的重视。

第二章 数学教育与传播

第一节 清末数学教育概述

清中晚期，数学教育呈阶段性发展。1860年以前，一方面承康熙帝重视数学学习之余绪，官方数学教育得以继续维持，一方面，乾嘉学派以数学作为研经治史之助，亦于民间倡导数学教育，并身体力行，开办了一些有数学课程的书院，同时，一些通数学的教师也在其经学教育之余为学生讲授数学知识。但从整体上来说，这时的数学教育远远称不上普及，与前代相较，并没有实质的发展。1860年以后，受两次鸦片战争失利之刺激，洋务派开始大力鼓吹数学教育，并开办了一批教授数学课程的教学机构。1895年，甲午海战失利，政体改革及教育改革成势在必行之态。此后，数学教育得到进一步的发展。1905年，科举废除，我国的数学教育也步入规范化阶段。

一、1860年以前的数学教育

就官方数学教育而言，乾隆三年，孙嘉淦奏准停止官学生学习算法，此后于“钦天监附近专立算学”“选满汉学生各十二人，蒙古汉军学生各六人”，以《数理精蕴》为教材，“分线、面、体三部”，每部学期一年，另学七政二年。共计五年毕业。[①] 乾隆四年起算学隶归国子监。监中设算学管理大臣（满）一人，助教（汉）一人，教习（汉）二人，专掌算法。学生学习“五年期满，

① 国子监纂集. 钦天监则例. 卷四十五. 近代中国史料丛刊三编第四十九辑. 台北：文海出版社. 1989

凡满洲、蒙古、汉军充补各旗天文生，汉人若举人引见以博士用，贡监生童亦以天文生补用。”① 乾隆末年及嘉道期间，国学数学教育仍未全废。

乾隆五十六年（1791）二月初十，乾隆帝钦命考题大考翰詹，其中有《拟张衡天象赋》为天算内容。阮元以“能作古文”为乾隆由第二名擢至第一。同年“夏至前二日”，阮元被召见于乾清宫西暖阁，乾隆帝“问及书画、天文算法等事。”②嘉庆四年，阮元“畴人传序”中自署：“经筵讲官，南书房行走，户部左侍郎兼管国子监算学扬州阮元撰。”阮氏很可能由于有关天文算法方面的对答较为出色而得掌国子监算学的。道光三年，李拱臣任钦天监监正，兼管国子监算学。

以上可见清代中央数学教育的概况。钦天监及国子监算学虽踵行二百三十九年，除为钦天监培养出一批台官之外，其他成就并不显著。其算学生人数恐未达到《国子监则例》的定额。《成钧课士录》所载光绪十四年至二十三年共九年间国子监学生二百五十一人，其中治算学者仅六人，其数目仅多于治乐（一人）及治纬（三人）。③

与官方数学教育相较，民间数学教育的发展更为显著。乾嘉时期，汉学派学者认为数学是研经治史的重要工具，他们除自己从事数学研究之外，亦提倡数学教育。钱大昕（1728—1804）主讲紫阳书院时期，李锐、谈泰均于院中问算于钱氏，后成为数学专家。长州人龚沦五旬以后入紫阳书院，“从钱氏受数学”④。此外，孙星衍曾从学钱氏于钟山书院，钱氏族子钱塘亦通天算。

① 清会典．卷76．国子监．转引自李俨．清季教育史资料．中算史论丛（四）．
② 张鉴等撰．阮元年谱．卷二．中华书局，1995．10
③ 张百熙辑．成钧课士录．光绪二十三年国子监刊本
④ 阮元．龚沦传．畴人传．卷四十二．商务印书馆．547

乾隆五十三年，王昶任江西布政使，亲自主讲江西四大书院之一友教书院。其课规中有："或专习一经，以一经而通众经；或专习一史，以一史而通诸史；或通天文算术，或为古文骈体，或习诗词，或研《说文》。小学、金石、文字，各成专门名家之业。"[①] 嘉庆二年，阮元（1764—1849）于杭州创办诂经精舍，阮氏与孙星衍（1753—1818）、王昶（1724—1806）分任主讲，经史之外，旁及天文、地理、算法、词章。诂经精舍对于当时及后世影响颇大，后诂经精舍学生钱仪吉（1783—1850）任河南大梁书院山长即仿诂经之制，兼课算学。道光十一年（1831），阮元弟子吴荣光于湖南长沙创办湘水校经堂，以经义、治事、词章三科试士，亦有数学内容。道光年间，李兆洛（1769—1841）主讲江阴暨阳书院。暨阳书院1838年创建。李氏掌学后，"因材而教，使治经术，通音韵、训诂，订舆图、考天官历算及治古文辞各专一艺。"[②]

其他通历算知识的官学及私塾教职人员也在教学中给愿意学习天算的学生以适当的辅导。焦循曾在其主讲的家塾中讲授数学知识，[③] 并编写《加减乘除释》作为教材。黄炳垕（1815—1893）在就读学塾中也和塾师讨论过天象问题。[④] 此外，各省学政间有重视算学者，其在任之时亦往往以算学课试县学或书院。道咸以降，乾嘉学派渐趋没落，开办过算学的书院如诂经精舍等亦停止了数学教育。

清末学者凌步芳（？—1902）多年任私塾教师，凌氏称：

---

① 王昶．江西友教书院规条．转引自洪万生．同文馆算学教习李善兰．近代中国科技史论集．中央研究院近代史研究所（台北）．国立清华大学（新竹）．1991．215～299

② 徐世昌．养一学案．清儒学案．卷一百二十七．第三册．中国书店，1990．381

③ 焦循．致李锐．转引自：洪万生．焦循给李锐的一封信．谈天三友．台北：明文书局，1993．144

④ 黄钟骏．黄炳垕传．畴人传四编．卷八．商务印书馆，1955．95～96

“晨昏书舍曼声长吟琅琅入听者，八比而已矣；时登讲堂，咳声咿唔，与生徒语者亦八比而已矣。曾无一语及算。非有所吝惜而不语也，盖不暇语也。且世之登巍科享荣名者众矣。皆无所用算。而通算者又不利试，则亦不必语也。君子之学也，专而后精，精于经史者必不肯分力于八比，精于八比者必不肯分力于算，精于算者亦必不肯分力于经史与八比。力分焉则不专，而欲所学之精也，难矣。”

应为当时教育之写照。

二、1860年以后的数学教育

鸦片战争之后，林则徐、魏源等少数先觉者开始了解西方国家的科技、政治、文化，并提出“师夷之长技以制夷”，但在此后二十年间，此语只是一句口号而已。二十年后，在第二次鸦片战争失败和太平天国的冲击下，清政府的根基已彻底动摇，朝野有识之士逐渐认识到中国正面临“千古未有之大变局”，开始大力倡导自强救国。对于多数早期洋务派首领来说，中国之所以不敌西方，完全是军事武器落后所至，故自强的重要举措即是学习西方先进的军事科技。李鸿章称：“中国欲自强，则莫如学习外国利器。欲学习外国利器，则莫如觅制器之器，师其法而不必尽用其人。”为了达到上述目的，就必须进行科技教育，培养自己的科技人才。而“一切西学皆从算学出，西人十岁外无人不学算。今欲采西学，自不可不学算。”[①] 于是加强数学教育便成为共识。

清末数学教育的发展主要有两个主要方向，其一是科举制度的改革，其二是开设数学课程的教学机构的普及。

倡导学习西方科技便自然要对传统的教育制度，尤其是对科举制度进行改革。科举制度产生于隋大业二年（606），至唐代得到进一步发展，这一制度成为我国此后近一千三百年中所实行的

① 冯桂芬．采西学议．中国近代学制史料．华东师大出版社，1986

主要选官制度。从历史上讲，科举制较诸隋前所实行的荐举制、察举制及九品中正制更为公正，它的产生是中国封建官僚体制达到完善的一个象征。科举考试方法代有不同。至明朝，科举“专取四子书及《易》、《书》、《诗》、《春秋》、《礼记》五经命题试士”，“其文略仿宋经义，然代古人语气为之，体用排偶。”此即所谓八股取士之法。清承明制，数百年来，考试方法日趋僵化。有清一代也曾议及改革科举考试，乾隆年间，舒赫德曾提出废除八股，被鄂尔泰所驳。1843 年，两广总督祁埙上奏请变通科举，要求以博通史鉴、精熟韬略、制器通算、洞知阴阳占候、熟谙舆图情形五门课士。祁埙摺中所提五门，除阴阳占候一门为毫无意义外，其他四门均是当时所亟应讲求的实用之学。此摺被礼部驳回，在当时并未引起很大反响。咸丰末年，冯桂芬于其《校邠庐抗议》中呼吁变通科举取士制度。冯氏设想了一套新的科举考试方法，建议考试分三场，第一场为经解，以经学为主，以小学、算学为附；第二场策论，以史学为主；第三场古学，散文骈体文赋各体诗各一。分三优、两优、一优酌给出身。冯氏建议：“凡国学天下学校书院皆用三事并试。”

同治九年（1870），闽浙总督英桂、船政大臣沈葆桢等附片奏称：“水师之强弱，以炮船为宗，炮船之巧拙，以算学为本”，因请“特开算学一科”。[①]同治十三年，李鸿章奏请特开洋务一科。光绪十年国子监司业潘衍桐请“另开一艺学科，凡精工制造、通知算学、熟悉舆图者，均准与考。”[②]于此同时，一些学者也纷纷著书立说，倡导改革科举制度。

---

① 英桂. 沈葆桢 请考试算学折. 转引自礼部考试算学折. 中国近代学制史料. 第二册. 华东师大出版社，1986. 18～19

② 潘衍桐. 请开艺学科折. 转引自中国近代学制史料. 第二册. 华东师大出版社，1986. 21

光绪十三年，江南道监察御史陈琇莹奏称："西法虽名目繁多，要权舆于算学。洋务从算学入，于泰西诸学，虽不必有兼数器之能，而测算既明，自不难按图以索。"请求朝廷"饬下各该学政，于岁科试报习算学之卷面，试其实在通晓者，即正场文字稍逊，亦宽予录取。"[①] 同年十月，总理衙门会议算学取士。其取法为"报考算学者，除正场仍试以《四书》经文、诗、策外，其考试经古场内另出算学题目，果能通晓算法，即将原卷咨送总理各国事务衙门复勘注册。俟乡试之年，按册咨取赴总理衙门，试以格物测算及机器制造、水陆军法、船炮水雷，或公法条约、各国史事诸题，择其明通者录送顺天乡试。""如人数在二十名以上，统于卷面加印'算学'字样，与通场士子一同试以诗、文、策问，无庸另出算学题目。""每于二十名额外取中一名。""卷数最多亦不得过三名，以示限制。""凡由算学中式之举人，应仍归大号，与各省士子合试，凭文取中。""此项人员，若于会试中式后，得用京职，恭候点派数员作为同文馆纂修，俾专讲习。嗣后或游历外洋，或充出使等差，均可随时奏派，因材器使。"[②] 光绪十四年（1888）"乡试，总理各国事务衙门将各省送到生监及同文馆学生试以算学题目，共录送三十二人"，"取中一名"举人。[③] 然而，一来考试范围太大，既要与其他举子一样参加八股策论考试，又要试及各种西方科技知识；二来取额太少，"天姿英敏之人，制艺之外，力能兼通西学。一经编入算学，虽有佳文，反致限于额不能取中"，遂至报考乏人。"此后历科乡试均以不满二十名，散入大号。"[④] 几经努力，算学科终于得以开办，但由于考试方法及录取制度的缺陷，并

---

① 陈琇莹．请开算学科折．中国近代学制史料．华东师大出版社，1986

② 礼部．议开算学科折．光绪政要．卷十三．18～19

③ 奕䜣．光绪十五年七月二十九日奏折．光绪朝东华录．中华书局，1958.

④ 奕䜣．光绪十五年七月二十九日奏折．光绪朝东华录．中华书局，1958.

没有达到广取人材的目的。

甲午失败之痛，使得国人无法再漠视传统教育模式的缺陷。要求变更甚至取缔科举制度的呼声更为强烈。光绪二十七年六月二十七日，刘坤一、张之洞奏请改革科举制度，并拟措施四条：“一曰设文武学堂、二曰酌改文科、三曰停罢武科、四曰奖劝游学。”[①]光绪二十七年（1901）七月，诏停八股，以中国政治、史事及各国政治、艺学命题取士。同月，谕各省书院改设学堂。此后，各地书院纷纷改办学堂，但在1904年以前，尚有一些旧有书院继续授课，且新办学堂亦多具有早先书院的很多性质。光绪三十一年八月（1905年9月），应袁世凯、赵尔巽、张之洞、周馥、岑春煊、端方等所请，废除科举。中国的数学教育开始纳入现代教育范畴之中。

在开设含数学课程的教学机构方面，奕䜣、曾国藩、左宗棠、李鸿章等纷纷在所辖范围内办起新式学堂。1863年上海同文馆、1864年广东同文馆开设数学课程，分别聘请陈暘、吴嘉善任教习。1867年京师同文馆天算馆开馆，次年，李善兰赴馆任教。此外曾国藩、李鸿章、左宗棠、丁宝桢等亦于各地建起各类军事学堂及实业学堂，1866年，闽浙总督左宗棠奏请于福建船政局福州马尾船厂附设船政学堂。1874年，上海江南制造局设立了操炮学堂。1876年，两广总督刘坤一倡议建立广东西学馆，聘请方恺任算学教习，1881年，张之洞奏请将其扩建为广东水陆师学堂。1880年，直隶总督李鸿章奏请在天津机器局建设水师学堂，1881年学堂正式落成。1885年，李鸿章奏请设立天津武备学堂，数学家华蘅芳、卢靖等先后任教于此。1889年，丁汝昌在山东威海卫创设水师学堂。1890年，北洋舰队于旅顺口鱼雷营内设立鱼雷学堂，1890年，两江总督曾国荃奏请在南京设立江南水师学堂。1895年，张之洞

① 刘坤一．张之洞．光绪二十七年六月二十七日奏折．江楚会奏．刊本

于南京设立沿南陆师学堂。1896 年，袁世凯奏请于天津设立新建陆军行营武备学堂（又名直隶武备学堂）。1897 年，张之洞奏请在湖北武昌设立湖北武备学堂等等。在这些学堂中，数学均被作为重要的授课内容。

流风所及，部分书院及私塾的教学中也加入了数学内容。1866 年，郭嵩焘于广东学海堂开设算学课，聘请邹伯奇任教。1876 年，由英国驻上海领事麦华陀提议，徐寿、傅兰雅等人发起，在上海开设上海格致书院，傅兰雅、华蘅芳等曾均于院中授课。1876 年，上海道冯焌光开设求志书院，刘彝程任算学斋斋长。1878 年，李镠于石鲸书院讲授数学课。1879 年，黄炳垕于宁波辨志文会讲授数学课程。1881 年，上海淞江郡开设融斋书院，刘彝程为其评阅算学课卷。1884 年，江苏学政黄体芳于江阴设立南菁书院，聘请张文虎任山长，1894 年，聘请崔朝庆任算学斋长。1890 年，张之洞在湖北武昌创办两湖书院，华蘅芳任算学分校。1894 年，湖南学政江标在长沙湘水校经堂添设算学课。

甲午以后，开设数学课程的教学机构更为普遍。1896 年，胡聘之等奏变通书院章程称："方今外患迭起，创钜痛深，固宜有穷变通久之方以因时而立政，但能不悖于正道，无妨兼取乎新法。"应"更定章程，延硕学逼儒为之教授，研究经义以穷其理，博综史事以观其变，由是参考时务兼习算学。凡天文、地舆，农务，兵事与夫一切有用之学，统归格致之中，分门探讨务臻其奥。"本此宗旨，胡氏于令德书院中添设算学。同年，翰林院侍讲学士秦绶章奏请整顿各省书院，预储人才。要求以六斋课士，"曰经学，经说讲义训诂附焉。曰史学，时务附焉。曰掌故之学，洋务条约税则附焉。曰舆地之学，测量图绘附焉。曰算学，格致制造附焉。曰译学，各国语言文字附焉。士之肄业者或专攻一艺或兼习数艺各

从其便。”[①]同年五月，李端棻奏称：“夫以中国民众数万万，其为士者十数万，而人才乏绝至于如是，非天之不生才也，教之之道未尽也。”李氏请于“京师以及各省府州县学皆设学堂。府州县学，选民间俊秀弟子年十二至二十者入学，其诸生以上，欲学者听之。学中课程，诵四书、通鉴、小学等书，而辅之以各国语言文字及算学、天文、地理之粗浅者，万国古史、近事之简明者，格致理之平易者。以三年为期。省学选诸生年二十五以下者入学，其举人以上欲学者听之。学中课程，诵经史子及国朝掌故诸书，而辅之以天文、舆地、算学、格致制造农商兵矿时事交涉等学。以三年为期。京师大学选举贡监生年三十以下者入学，其京官愿学者听之。学中课程一如省学，惟益加专精，各执一门，不迁其业。”[②]变法派康有为、梁启超等亦纷纷撰文宣传改革传统教育模式。1898年4月，张之洞著《劝学篇》，提倡新旧兼学，中学为体，西学为用。同年7月，清政府将该书颁发给各省督抚、学政，令各省广为刊布，实力劝导。

与此相应，各地纷纷创办新式学堂或改革旧有书院，而添设数学课程成为其中最为主要的一项改革措施。1894年，浙江上虞创建上虞算学堂，数学家支宝枬任山长。1895年，刘光蕡于陕西味经书院开设时务斋，讲授数学课程。1895年10月，天津海关道盛宣怀在天津设立中西学堂，聘请美国传教士丁家立（C. D. Tenney，1857—1930）任总教习。1896年，江西巡抚德寿于南昌友教书院开设算学课。是年，谭嗣同设立浏阳算学社。1897年，江苏常州龙城书院添设算学课，华世芳任算学教师。1897年，浙江巡抚廖寿澧在杭州创建求是书院，开设数学课。1897年，陕西巡抚魏光焘于西安创设游艺学塾，京师同文馆毕业生萧开泰任算学

---

① 秦绶章．整顿各省书院折．转引自中国近代学制史料．华东师大出版社，1986

② 李端棻．请推广学校折．转引自中国近代学制史料．华东师大出版社，1986

教师。1898年，广东佛山书院开设算学课，京师同文馆算学毕业生熊方柏为书院评阅算学课卷。[①]

1898年6月，光绪帝谕内阁“将各省府厅州县现有之大小书院，一律改为兼习中学西学之学校。”[②]此后，湖北创设自强学堂，湖南设立长沙时务学堂，直隶先后设立保定畿辅学堂，天津设立北洋高等学堂，江苏南京储材学堂改为江南学堂，江西南昌友教书院改为算学堂，贵州改学古、经世二书院为学堂，浙江湖州、绍兴、温州成立崇实学堂和中西学堂，广东成立时敏学堂，四川成都和奉天均成立中西学堂，山西太原成立储材馆等等。[③]同年，京师大学堂正式成立。戊戌变法失败，慈禧以书院学堂名异实同为由，取消书院改学堂之令，各地书院还继续授课，但已多有所改革。1898年四川学政吴庆抵通饬全省曰：“拟大为变通所属各书院官师月课，一律改课时务策论，如大沿革、中外交涉以及天文、舆地、兵谋、制造、测算，分门命题，不得再课时文帖试。”[④]1901年，慈禧太后于西安颁发兴学诏书，“著各省所有书院，于省城均改设大学堂，各省及直隶州均改设中学堂，各州县均改设小学堂，并多设蒙养学堂”。为解决师资问题，各地还纷纷办起师范学堂。数学成为这些大、中、小学堂及师范学堂的必修课程。

1902年8月15日，清政府颁布了第一个学校系统文件，《钦定学堂章程》，史称壬寅学制。由于清政府认为张百熙“喜用新进”，此学制未及施行即被废止。1904年1月13日，清政府批准了张百熙、荣庆、张之洞重订的学堂章程，史称癸卯学制。此学

① 详见：田淼．清末书院的数学教育．中国科学院自然科学史研究所博士论文，1994

② 光绪帝．诏定国是．光绪朝东华录．第四册．4093

③ 陈学恂．中国近代教育大事记．上海教育出版社，1981．99．

④ 吴庆抵．通饬各府厅州县变通书院章程札．皇朝蓄艾文编．卷十六．转引自中国近代学制史料．第一辑下册．华东师范大学出版社，1986，163

制包括《大学堂章程（附通儒院章程）》、《高等学堂章程》、《中学堂章程》、《高等小学堂章程》、《初等学堂章程》、《蒙养院章程及家庭教育法》、《优级师范学堂章程》、《初级师范学堂章程》、《实业教员讲习所章程》、《高等农工商实业学堂章程》、《中等农工商实业学堂章程》、《译学馆章程》、《进仕馆章程》、《各学堂奖励章程》、《各学堂管理通则》、《任用教员章程》等十七件。同时还颁布了该学制的总纲《学务纲要》。学制规定了各级各类学堂的宗旨、修业年限、入学条件、课程设置及相互衔接关系。规定“无论何等学堂，均以忠孝为本，以中国经史之学为基，俾学生心术壹归于纯正，而后以西学谕其知识，练其艺能，务期他日成材，各适实用”为宗旨。此为中国近代第一个实施的学制，它标志着传统教育体制的结束。

在此一阶段，全国学堂数目及在学人数亦有显著发展。其数目为：1902 年，6912 人，1903 年，31428 人，1904 年，99475 人，1905 年，358876 人。科举制度废除后，中国教育得到更为充分的发展，1910 年，全国学堂数为 42696 所，学生数共 1300739 人。[①] 数学作为各类学堂的必修课在全国得到普及。

此外，自 1898 年以后，各地陆续派遣留学生赴日本及欧美留学，其中部分学生专习数学，他们归国后多从事数学教育，在各地大学建起数学系，从此中国数学研究与数学教育开始融入世界数学教育之中。

清代尚有另一种学习数学的教育机构，即教会学校。1815 年 8 月，伦敦会传教士米怜于马六甲开办米怜学塾，1818 年，马礼逊在学塾的基础上建成英华书院（The Anglo-Chinese College）。英华书院办学宗旨，一则造就欧人学习中国语言及中国文字，二

① 见：郑登云．中国近代教育史．华东师范大学出版社，1994．158

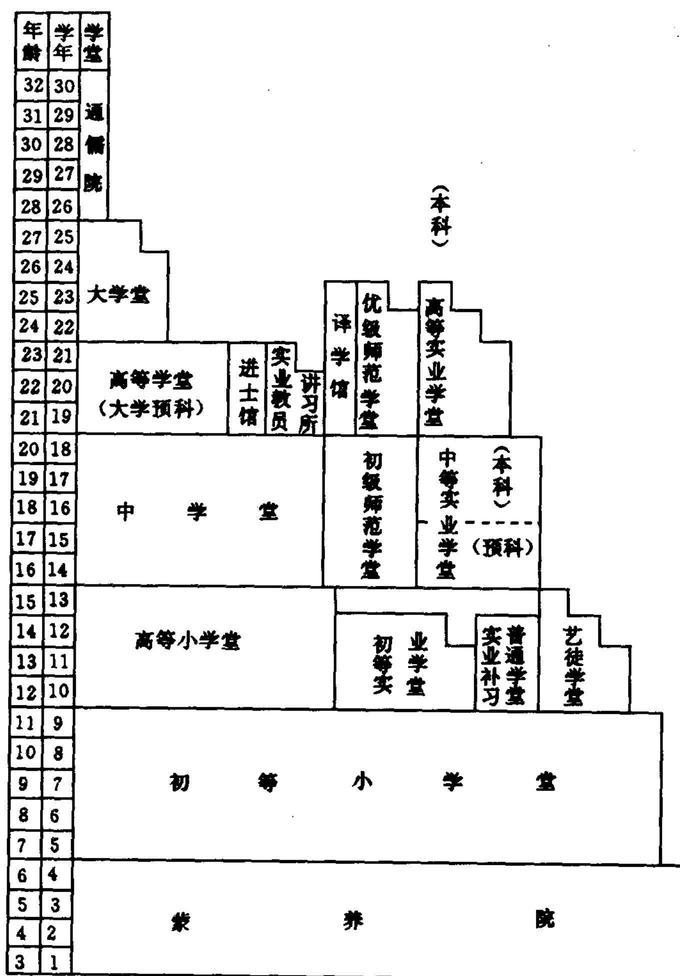


图 4.2.1　癸卯学制系统图

（采自《中国近代教育史》）

则举凡恒河外方各族，皆能以英语接受西欧文学及科学之造就。[①]此后，传教士陆续开办以宣扬基督教为宗旨的学校。鸦片战争之后，传教士可以公开在通商五口岸传教及设立学校，于是上海、宁波、登州、福建等地纷纷建起传教学校。丁韪良、伟烈亚力、狄考文、林乐知等均曾任教于此类学校。这些学校中多有数学教育，但其教学程度往往较浅。19世纪70年代之后，国内出现了登州文会馆、登州神学院、北京潞河书院、圣约翰书院、杭州育英书院等具有高等教育水平的学校。此时教会学校中的数学教育以登州文会馆最为出色。狄考文还编译了《代数备旨》、《形学备旨》等书，这些书籍后来成为清末学堂主要数学教科书，[②]对于数学在中国的普及产生了一定影响。

处于中国社会及教育的转型阶段，较诸前代，清末数学教育呈现出一些明显的特点。

在发展趋势上，受特殊的文化和社会环境的影响，清中晚期的数学教育呈明显的阶段性特点。1860年以前，受乾嘉学派影响，数学教育以培养通儒为目的，仍属传统教育范畴。此后，在洋务派首领及朝野有识之士的倡导下，数学研究与教育都有所发展。但由于传统势力的抵制，数学教育并没有在全国得到普及，仅上海、广东、江浙、天津等少数沿海地区开设了部分新式学堂及有数学课程的书院。1895年之后，传统政教体制受到致命的冲击，在维新派的大力推动及参与下，数学教育进一步得到普及。1904年新学制确立及1905年科举废除，中国数学教育亦随之步入制度化和规范化的进程。

在数学教育水平上，清末数学教育在专业化程度上较诸前代

① 米怜．马礼逊．马六甲筹组英华书院计划书．见：中国近代学制史料．第四辑．华东师范大学出版社，1993．7．

② 参见本卷第三编第二章第一节。

已有明显提高。清末以前，中国的数学教育多是以致用为目的。除钦天监以培养专职天文观测人员为目的外，其他教学机构的数学教学目的则有两种。其一是为了解决日常生活中所需要的实用测量及计算，如土地测量，商业运算等，向为传统教育推崇的北宋胡瑗的湖学中的数学教学即属此类。其二则是为了培养通儒而进行的教育。奕䜣、曾国藩、李鸿章等倡导数学教育之始，是为了以数学为始基学习西方先进的军事及民用科技，也是出于其实用目的。但学习西方科技需要更为精深及专业的数学知识，这就需要专业素质较高的数学家进行传授，而同时也需要学生一心专注于数学学习。所以这些教学机构均聘数学专家作为算学教师，算学生也多不再是以经学或举业为主，而是专习数学，这些都为数学教育趋于专业化奠定了基础。而数学教学的内容多为纯数学知识，其中包括了清末传入的大部分西方数学内容和中国传统数学的最后研究成果。这也表现出在这一阶段中国数学自身的发展趋势及当时大多数数学家数学研究的取向。

在数学教学方法方面，清末数学教育已逐渐向现代教育方式转化。首先，清末开设数学课之部分书院已开始进行专科教学。中国传统教学机构的教学通常由一人负责。北宋胡瑗湖学中，分通经、致用两斋，而教学则由他一人负责。清代初年黄宗羲、颜元等的教学及乾嘉学派所开有数学学习书院的教学亦是如此。由于清末数学教育对教学水平提出了更高的要求，这对数学教师也就提出了更高的要求。求志书院、宁波辨志文会均分数斋教学。南菁书院虽沿用山长制，但亦聘崔朝庆为课长。这些均已具备专科教学的雏型。甲午以后，新式书院及学堂教学多取法日本，与现代教育的管理模式已极为接近。其次，清末书院的数学教育在教学方式上向现代讲课方式转化。中国传统教育注重学生自学，教师指定书籍，由学生自己阅读，记笔记。只是一月甚或一季进行课试，并根据学生交笔记及提问题的情况间或进行会讲。清末早

期开办数学的教学机构也沿袭了这一讲课方式，但后来渐渐加课。至癸卯学制前，很多数学教习已按日登台讲课，并开始有了适于讲课的教材。

从上述特点可以看出，清末数学教学在教学内容、教学方法及组织方式等方面均逐渐向现代教学模式转换，为中国传统教育向现代教育转换的一个过渡阶段。

当然，清末数学教育在很多方面还存在着局限。

首先是教材问题。癸卯学制以前，国内没有通用的数学教科书，学生多依靠传统数学著作及翻译书籍学习数学。《代数术》、《代数学》、《代微积拾级》、《微积溯源》及《数理精蕴》、《几何原本》等书籍为当时最为通用的学习与研究用书。这些书籍作为西方代数学及微积分学的入门教材亦无不可，但由于其中不含当时西方最为先进的数学成果，以其为基础作进一步研究则是无法得到西方水平的数学成果的。当时中国最为出色的数学家李善兰自称不让西人，限于当时的情况，其于西方数学方面工作只能在一个较低的基础上进行。李氏所得的最为出色的数学成果如尖锥术、垛积术等实际上都是其全面接触西方符号数学等内容之前所作，且均集中于中国传统数学领域。清末另一个重要数学家刘彝程的工作亦是如此。

其次是师资问题。早期数学教师多是通过自学获取数学知识的，兼之没有通用的数学教材，这就使得学生的学习受到数学教师水平的限制。而这些数学教师均不懂外语，其对数学的研究只能依赖于翻译书籍，不可能将较为先进的西方数学知识介绍给学生。

其三是学生基础问题。19 世纪 60 年代以前，除江浙等地区有少数传授数学知识的教学机构及部分沿海地区有一些教会学校外，其他地区几乎没有专门的数学教育。这就使得开设数学课程的教学机构的生源受到影响。清末书院的数学教育只能称作是启

蒙教育。王佐称上虞算学堂学生："虞地偏才少，从学诸生，半皆年幼质鲁"。[1]萧开泰于《游艺课草初集》序中称："初到时，试诸生以天元、代数，无一能知其为何物者。"[2]在如此基础上进行数学教育，而期于短期内得到数学成果，是不可能的。

其四是办学宗旨问题。奕䜣、曾国藩、李鸿章等提倡数学教育，其本质上是要借助于数学知识的普及学习西方军事及民用科技，培养外交及政治人材，并非造就数学专家。这便对学生日后出路及数学教学学制等方面有很大影响。同文馆数学高材生蔡锡勇、汪凤藻、左秉隆、杨兆鋆、杨枢等后均先后派驻外国，回国后亦多参加洋务活动而没有再进行数学研究。而上海广方言馆学生除选送同文馆深造者外，多散入通商督抚衙门及海关监督，担任翻译或其他洋务工作。这便使得具有一定数学水平的学生脱离了数学学习与研究，使得他们无法成为数学专业人材。

当然，对于清末数学教育的历史评价，不能离开此一教育所处的历史环境和文化环境。

在中国文化悠久的发展进程中，也曾吸收了印度等外来文化，但却从未依附于外来文化。这就使得中国文化有着太多的积淀与负载，也就造成了其极大的惯性。多年来唯我独尊的地位使其无法正视同样先进，甚至在很多方面超出自己文明的西方文明的存在。19世纪中叶以后，中国与日本同时面临西方列强的武力威胁，同样需要政体和文化的改革。从一定程度上来说，日本所面对的是一个选择其学习对象的问题，也即是否应从中国儒家文化转为西方文化；而对于中国来说，则是处于一个亘古未遇的转折期。从这一点来说，二者所面对的困难是不可比的。在这一文化背景下，在日本开始全面地接受西方科技的同时，中国的自强运动及西方

---

① 王佐. 上虞算学堂课艺跋. 上虞算学堂课艺. 光绪二十七年刊本

② 萧开泰. 游艺课草初集序. 游艺课草初集. 光绪二十四年刊本

文化、科技的传播都举步维艰。

可以说，清末数学教育是在中国数学相对于世界数学水平已经落后，而数学教育几呈空白的基础上进行的，其办学过程中又受到各种条件的限制及传统势力的抵制，这一切都决定了这一教育不可能在短期内取得很大收效。但作为中国教育转型时期教学形式，早期开设数学课的教学机构还是为清末数学家创造出一个安心研究与学习的环境，并造就出一些数学专门人材，其教学在一定程度上带动了清末学风的转变。甲午之后，各地纷纷建起新式学堂，这些学堂均有数学教育，亟需数学人材，早期数学毕业生承担了国内大部分的数学教学任务,促进了数学在国内的普及。即使在大批留学生回国之后,一些早期数学毕业生仍活跃于初、中级学校的数学教育中。其中崔朝庆翻译了多种日本数学教科书,上虞算学堂学生石承宣编有《算术教科书》。可以说，正是由于清末数学教育的发展，使得本世纪二十年代归国的留学人员的数学教学工作得以顺利进行。从这个角度来说，清末数学教育工作亦属中国现代数学大厦的一块基石，具有不容忽视的历史地位。

第二节 《同文馆算学课艺》

《同文馆算学课艺》亦称《算学课艺》。有光绪六年(1880)同文馆聚珍版，光绪二十二年(1896)石印本等版本。书中收录了京师同文馆(以下简称同文馆)中部分学生的天文算学试题解答。该书题“同文馆算学教习李壬叔先生阅定，副教习席淦、贵荣编次，肄业生熊方柏、陈寿田、胡玉麟、李逢春同校。”同文馆总教习丁韪良序称：“开馆以来十有余载，兹由副教习席淦、贵荣等将所积试卷选辑四帙，颜曰《算学课艺》。”①

① 丁韪良.同文馆算学课艺序.见:同文馆算学课艺.光绪二十二年石印本

一、《算学课艺》的编者

席淦(1845—1917)，原名裕宗，字翰伯。为上海广方言馆首批毕业生，同治七年三月初九日(1868年4月1日)上海广方言馆第一次咨送到京，从李善兰学算。[①] 李善兰去世之后，递补为算学教习。总理衙门在总教习请补此缺时，覆称："请补算学教习一席，并请以副教习席淦授李善兰之遗缺，学生胡玉麟、陈寿田可授为副教习，帮同训课一节，…现此席久虚，允宜复设。"[②] 席淦于1886年继任后，教学口碑亦甚佳。譬如曾就读同文馆的齐如山对同文馆批评甚苛，而独对李善兰师徒有所推崇："…其中最认真的，就是汉文算学，教席为席翰伯，乃李善兰得意的门生，教法也很好。家兄补六两银子的膏火就是因为算学学的深"。[③] 席淦在同文馆，"讲授垂三十年，造就海内英才甚众。""累保至兵部郎中截取知府。光绪己亥试经济特科，南皮张文襄公以淦名列荐，剡谢不应，壬寅直督袁世凯奏调北洋差委，历充官银号筹款局淮军银钱所总地办，箸核精密。顾性恬退，又目击时事日非，未几即乞病归。"[④]

席淦著有《各等面体互容比例》一卷、《弧矢启秘图解》二卷，均收入刘铎所辑《古今算学丛书》中。"此外尚著有几何学算书数种，庚子毁于乱，惟《抱膝居士》诗稿一卷藏于家。"

贵荣，生平不详。只知他光绪五年至十三年任算学副教习，内务府员外郎。他在"格物测算"方面有卓越的表现。他在同治十二年(1873)汉文格物岁试中获第一名。《中西闻见录》第二十号收

---

① 朱有瓛. 中国近代学制史料. 第一辑上册. 上海：华东师范大学出版社，1986，53

② 席裕福，皇朝政典类纂. 光绪二十九年刊本. 台北：成文出版社. 卷二百三十六。

③ 齐如山. 齐如山自传. 见：中国一周. 第240期. 民国43年11月29日出刊. 18

④ 张仁静等. 清浦县续志附编. 民国23年刊本

录了这份试卷。此外，《中西闻见录》第二十三、二十五号还分别收录了同治十三年(1874)月课格物贵荣试卷。[①]从《算学课艺》四卷的总计题数也可看出，贵荣的课艺被收入的最多，总计三十二题。尽管我们对贵荣的生平一无所知，但从这些史料中，可以看出他确实有很高的算学素养。

从光绪五年(1878)《同文馆题名录》记各馆学生大考榜中，能看出《算学课艺》的同校者熊方柏、陈寿田、胡玉麟、李逢春均排于汉文算学或格物测算名次前列。从《算学课艺》亦能看出他们的算学与格物水平应属上乘。

二、《算学课艺》的内容

同文馆是我国新旧教育之转折点。自从它增设了天文算学馆，已初具新式学堂的模型，更重要的是它掀开了中国数学教育的新一页。[②]同文馆虽非中国最早开设算学课的学习机构，却对当时西方近代数学的传播产生了很大的影响。光绪六年(1880)，由副教习席淦、贵荣编辑出版了《算学课艺》，它是当时同文馆算学教学成效的具体例证，也是研究晚清数学教学内容及教学方式的很好素材。

《算学课艺》分元、亨、利，贞四卷。第一卷五十题；第二卷四十六题；第三卷四十二题；第四卷六十题，共计一百九十八题。该书收录了席淦、贵荣、汪凤藻、蔡锡勇等五十二位学生的课艺。席淦在序杨兆鋆《须曼精庐算学》时称："时天算总教习为海宁李壬叔先生，从游者六七十子"。[③]上述五十二位学生应在此数。下表是根据《算学课艺》所选这五十二位学生的课艺总计表：

---

① 朱有瓛. 中国近代学制史料. 第一辑上册. 上海：华东师范大学出版社，1986. 121～125

② 金福. 京师同文馆开设天文算学始末. 自然辩证法通讯. 1992. 6. 62

③ 杨兆鋆. 须曼精庐算学. 嘉业堂刊本

表 4.2.1

序号	姓名	卷一/题	卷二/题	卷三/题	卷四/题	课艺数	备　注
1	贵　荣	7	5	2	18	32	与杜法孟同解一题
2	汪凤藻	7	9	0	2	18	
3	杜法孟	2	5	3	4	14	
4	陈寿田	6	3	4	1	14	
5	王宗福	5	1	1	2	9	与胡玉麟同解一题
6	王镇贤	0	0	8	1	9	
7	胡玉麟	3	0	2	4	9	
8	杨兆崟	3	3	0	2	8	
9	王钟祥	1	0	4	2	7	与陈寿田同解一题 与贵荣同解一题
10	蔡锡勇	2	4	0	0	6	
11	文　续	1	2	2	0	5	与王镇贤同解一题
12	长　秀	1	0	2	2	5	
13	左秉隆	1	4	0	0	5	
14	杨兆鋆	2	3	0	0	5	与席淦同解二题
15	李逢春	0	0	1	3	4	与王钟祥同解一题 与贵荣同解一题
16	席　淦	2	2	0	0	4	
17	博勒洪武	2	0	0	2	4	
18	王文秀	0	0	1	2	3	与汪凤藻同解一题
19	汪远焜	1	0	1	1	3	

续表 4.2.1

序号	姓名	卷一/题	卷二/题	卷三/题	卷四/题	课艺数	备 注
20	辛泽贤	1	0	1	1	3	
21	承 霖	1	1	1	0	3	与陈寿田同解一题
22	徐广坤	1	1	1	0	3	
23	王文灏	0	0	0	2	2	
24	朱格仁	0	1	0	1	2	
25	延 俊	0	0	1	1	2	
26	赓 善	0	0	1	1	2	
27	黎子祥	1	1	0	0	2	
28	熊方柏	0	1	0	1	2	
29	懿 善	0	1	1	0	2	
30	马呈忠	1	0	0	0	1	
31	巴克他纳	0	0	1	0	1	
32	长 盼	0	0	0	1	1	
33	左 庚	0	0	1	0	1	
34	任敬和	0	0	1	0	1	
35	庆 全	0	0	0	1	1	
36	沈 铎	0	0	0	1	1	
37	延 铎	0	0	1	0	1	
38	时永清	1	0	0	0	1	
39	时雨化	0	0	0	1	1	
40	杨 枢	0	1	0	0	1	
41	英 铎	0	0	1	0	1	

续表 4.2.1

序号	姓名	卷一/题	卷二/题	卷三/题	卷四/题	课艺数	备　注
42	彦　慧	0	0	0	1	1	
43	联　印	0	0	1	0	1	
44	联　秀	0	0	0	1	1	与贵荣同解一题
45	联　芳	0	0	0	1	1	
46	联　弟	0	0	0	1	1	
47	联　兴	0	0	0	1	1	
48	斌　衡	0	0	1	0	1	
49	韩常泰	0	0	1	0	1	
50	塔克什纳	0	0	0	1	1	
51	熙　璋	0	0	0	1	1	
52	蔡兆熊	0	1	0	0	1	
总计						210	12

上表按课艺多少为序，若课艺数量相同则按姓氏笔画为序。有些课艺是一题有两人解，则在备注中注出。因此纯题数为一百九十八题，但总课艺数为二百一十题，其中有十二题为两人同解一题。

《算学课艺》涉及范围很广，“其题以弧角、重学、勾股为最多，颇有精理”，[①] 如下表所示：

① 丁福保等．四部总录算法编．文物出版社，1984

表 4.2.2

卷次	内容	课艺数量
卷一	天文测算	18
	重学测算	26
	炮弹射程	5
	航海测算	1
卷二	平面几何	23
	立体几何	5
	垛积	9
	无穷级数	1
	连比例	1
	不定方程	6
	四元术	1
卷三	《测圆海镜》类问题	42
卷四	勾股问题	25
	各类应用杂题	35
	总计	198

《算学课艺》由同文馆副教习席淦、贵荣等将所积试卷选辑而成。课艺中的题目可能是同文馆月课、季考、岁试及大考中的试题。对照岁试试题，可以看到，只有少数题与《算学课艺》中题目一致或属同一类型。因此，它的大部分题目来自月课和季考和大考。

同文馆的考试分月课、季考、岁试及每三年一次的大考。此外，总理衙门大臣也不定期到馆抽考。月课每月初一日举行，季考于二月、五月、八月、十一月之初一日举行。岁试每年十月定期面试，在岁试的时候，该月月课、季考起初仍然举行。同治四年起，规定季考时，停止该月月课以免重复。大考每届三年举行一次，由总理衙门执行。[①] 至于考试的方式，则月课由教习自行出

① 吴宣易. 京师同文馆略史. 读书月刊. 第二卷. 第四号。1933

题并评分。季考由教习或总理衙门大臣出题、监考，试卷并需经总理衙门大臣裁定。岁试及大考均由总理衙门大臣出题，监考和评分。

《算学课艺》于1880年出版，故仅能从1880年之前仅存的四次岁试题目中与其进行对照，详细内容见下表。[①]

表 4.2.3

算学课艺			岁试题目			
卷次	题号	主要内容	年代	题号	名称	备注
一卷	14	测月地距其法若何	1878	1	洋文天文题	与后半问相同
	37	有炮膛径尺五若以铁较水重八倍求其炮子轻重若何	1872	3	算学题	相同
	38	有枪子向上直放二十秒始落求其升高若干并作图明其理	1872	6	算学题	相同
	46	有滑车两边悬二重，一十斤，一二十五斤重者下行轻者上行求第一秒各过若干路	1870	17		类型相同
卷二	11	有大小二弧之正弦余弦，求其和弧较正弦有几法	1870	4		类型相同
	1	今有炮台六百九十七尺长对面有敌国兵船从此头视之成角八十四度四十分，从彼头视之成角八十六度三十分求船距二处及炮台与船最近之处相距各若干	1873	9	算学题	类型相同

① 洪万生. 同文馆算学教习李善兰. 见：近代中国科技史论集. 台北，1991，224

续表 4.2.3

算学课艺			岁试题目			
卷次	题号	主要内容	年代	题号	名称	备注
卷三	7	有大弦有重勾求圆径	1872	7	算学题	相同
	21	有断勾股较有重勾股较求圆径	1872	5	算学题	相同
卷四	5	勾股形有对勾股二角有弦和较求勾股弦其法若何	1873	5	算学题	相同
	16	有勾幂减勾等于弦较和，只云股等于倍弦较较求勾股弦各若干	1872	1	算学题	相同
	50	有船载男妇小儿九十人，男较妇多四，小儿较男妇多十求各数若干	1870	14		类型相同

卷一主要是关于天文测算、重学测算、炮弹射程及航海测算等实际应用问题。其天文测算问题多为测量日食及各星经纬度，北极去日度数等内容，其中有八题无具体数目，只要求写出立法之原。重学测算问题中包括测曲线及曲面重心，杠杆原理问题，运动速度及加速度问题，浮力问题及定滑轮问题等。

天文测算问题多用到球面三角、四率比例等数学知识。现以第十题陈寿田课艺为例予以说明。

“设新到一海岛测得北极出地三十度求白露日巳正太阳高弧若干。

答曰：五十二度五十三分五十五秒。

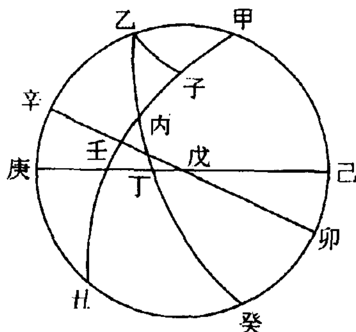


图 4.2.2

如图 4.2.2，甲为北极，乙为天顶，乙己癸庚为子午圈，辛戊卯为赤道，乙丁癸为高弧，甲壬丑为赤经，丙为太阳，壬为已正，甲己为新得海岛之北极高三十度，丙壬弧五度五十五分十一秒为白露日之赤道北纬度，与甲壬九十度相减得甲丙弧八十四度四分四十九秒为日距北极度，成甲乙丙斜弧形。乃自乙作乙子垂弧于形内分乙子甲、乙子丙二正弧形，同以子为直角。求法列于左。(以已正与十二小时相减变度得三十度即日距午东赤道度，以北极出地三十度与九十度相减得六十度即北极距天顶。)

先用乙子甲正弧形（此形有甲角当辛壬弧、三十度为日距午东赤道度，有甲乙弧、北极距天顶六十度，有子直角）：

一率：半径　　　　二率：甲角正弦

三率：甲乙正弦　　四率：乙子正弦

检表得乙子垂弧二十五度三十九分三十二秒

一率：半径　　　　二率：甲角余弦

三率：乙甲正切　　四率：甲乙正切

检表得五十六度十八分三十六秒即甲子弧，以甲子弧与甲丙弧相

减得乙丙弧二十七度四十六分十三秒即日距分边。

次用乙子丙正弧形（此形有子丙弧距日分边，有乙子垂弧，有子直角）：

一率：半径　　　　二率：子丙余弦

三率：乙子余弦　　四率：乙丙余弦

检表得三十七度六分五秒，与九十度相减得五十二度五十三分五十五秒即所求。

又法：以日距北极与北极距天顶相加减，半之得半和较弧，甲角半之为半角：

一率：半和弧正弦　　　　二率：半较弧正弦

三率：半角余切　　　　　四率：半较角正切

一率：半和弧余弦　　　　二率：半较弧余弦

三率：半角余切　　　　　四率：半和角正切

一率：半较角正弦　　　　二率：半和角正弦

三率：半较弧正切　　　　四率：半对弧正切

检表倍之得乙丙弧三十七度六分五秒。余法同前。”

上题以现代数学符号翻译，即

已知 A：北极，B：天顶。

$\overset{\frown}{BFJG}$为子午圈，

HEM 为赤道，

$\overset{\frown}{BDJ}$为高弧，

$\overset{\frown}{AIL}$为赤经。

C：太阳，I：巳正。

$\overset{\frown}{AF}=30°$为新得海岛的北极高度，

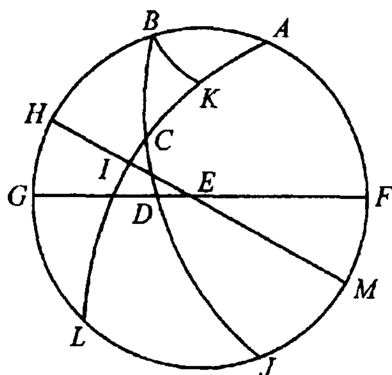


图 4.2.3

$\overset{\frown}{CI}=5°55'11''$为白露日的赤道北纬度。

$\overset{\frown}{AI}=90°$。

因为　$\overset{\frown}{AC}$为日距北极度，

所以　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AI}-\overset{\frown}{CI}=90°-5°55'11''=84°4'49''$。

自 B 作 $\overset{\frown}{BK}\perp\overset{\frown}{AC}$ 得 BKA 与 BKC 两直角弧三角形，且 $\angle BKC=\angle BKA=90°$。

因为　$\overset{\frown}{HI}$为日距午东赤道度，

所以　$\overset{\frown}{HI}=30°$。

在直角弧三角形 BKA 中，已知

$$\angle A=\overset{\frown}{HI}=30°,\ \overset{\frown}{AB}=60°,\ \angle K=90°。$$

设 $a=r$，$b=\sin A$，$c=\sin\overset{\frown}{AB}$，$d=\sin\overset{\frown}{BK}$（$r$ 为半径）。

因为　$a:b=c:d$，

所以　　$d=\frac{bc}{a}$，

$\overset{\frown}{BK}=25°39'32''$。

再设 $a=r$，$b=\cos A$，$c=\tan\overset{\frown}{AB}$，$d=\tan\overset{\frown}{AK}$。

因为　　$a:b=c:d$，

所以　　$d=\frac{bc}{a}$，$\overset{\frown}{AK}=56°18'36''$。

因为　　$\overset{\frown}{KC}=\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AK}$，

所以　　$\overset{\frown}{KC}=84°4'49''-56°18'36''=27°46'13''$。

在直弧三角形 BKC 中，已知

$\overset{\frown}{KC}=27°46'13''$，$\overset{\frown}{BK}=25°39'32''$，$\angle K=90°$。

设 $a=r$，$b=\cos\overset{\frown}{KC}$，$c=\cos\overset{\frown}{BK}$，$d=\cos\overset{\frown}{BC}$。

因为　　$a:b=c:d$，

所以　　$d=\frac{bc}{a}$，$\overset{\frown}{BC}=37°6'5''$，

太阳高弧$=90°-37°6'5''=52°53'55''$。

又法：　半和弧$=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}}{2}$，

半较弧$=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$，

半角$=\frac{\angle A}{2}$。

设 $a=\sin\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}}{2}$，$b=\sin\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$，$c=\cot\frac{A}{2}$，$d=$半较角正切。

因为　　$a:b=c:d$，

所以　　$d=\frac{bc}{a}$，可求出半较角。

又设 $a=\cos\dfrac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}}{2}$，$b=\cos\dfrac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$，$c=\cot\dfrac{A}{2}$，$d=$半和角正切。

因为　　$a:b=c:d$，

所以　　$d=\dfrac{bc}{a}$，可求出半和角。

再设 $a=\sin$(半较角)，$b=\sin$(半和角)，$c=\tan\dfrac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$
$d=\tan$(半对弧)。

因为　　$a:b=c:d$，

所以　　$d=\dfrac{bc}{a}$。

因为　　$\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}=$半对弧，

所以　　$\overset{\frown}{BC}=37°6'5''$。

太阳高弧$=90°-\overset{\frown}{BC}=90°-37°6'5''=52°53'55''$。

由此题可见，虽然陈氏的解法比较复杂，但其"绘图演式，均整齐可法"[①]，且解题条理性强，步骤十分清楚。该题两种解法均用到了四率比例法及球面三角的知识。

在卷一的天文测算题目中，上题比较典型。在关于天文测算题目中有十二题用到球面三角及三角函数知识，单纯用到天文知识的题目很少。

有关重学测算题，一般用到中国传统数学中的天元术，用天、地、人、物表示未知数，但解题过程中用到西方近代的代数知识。以三十一题贵荣课艺为例。

---

① 朱有瓛. 中国近代学制史料. 第一辑上册. 上海：华东师范大学出版社，1986. 83～88

“有国王以黄金六百两令工造玺，疑其搀银。令博士验之，入水失重四十两，试推搀银若干，并详其验法。

答曰：二百两。

按水重学理，黄金于水失重二十分之一，银于水失重十分之一乃有等数：

二元草

搀银══天

净金══地

天⊥地══六〇〇

地══六〇〇⊤天

$\frac{\text{一〇}}{\text{天}}$══银失重　$\frac{\text{二〇}}{\text{地}}$══金失重

$\frac{\text{一〇}}{\text{天}}$⊥$\frac{\text{二〇}}{\text{地}}$══四〇

二〇天⊥一〇地══八〇〇〇

二天⊥地══八〇〇

地══八〇〇⊤二天

以地之同数代地得

六〇〇⊤天══八〇〇⊤二天

二〇〇══天”

此题以现代符号译之，即为：

设搀银 x 两，净金 y 两。

所以　　　$x+y=600$，

即　　　　$y=600-x$。　　　　(1)

又因为　银失重$=\frac{x}{10}$，

　　　　金失重$=\frac{y}{20}$，

所以 $\frac{x}{10}+\frac{y}{20}=40$，

即 $20x+10y=8000$。

$2x+y=800$，

$y=800-2x$。　　(2)

代(2)式入(1)式，得

$600-x=800-2x$，

故 $x=200$。

以上解题过程与现在解二元一次方程组的方法基本一致。

卷二包括平面几何、立体几何、垛积、无穷级数、比例、不定方程及四元术等问题。在设题形式上大多还保留中国传统算学中实际问题的形式，但在运算方法上已有一些不同于古法的特点。兹选数例，予以说明。

第二十二题杜法孟课艺原题为。

“今有相等三大圆相切，隙中容三小圆。每小圆切二大圆，大圆径十万求小圆径若干。

答曰：小圆径一万〇一百〇二尺〇五分强。”

杜法孟于此题中简明、正确地给出了小圆径的作图法。利用代数方法给出该题的一般解，其后以数字入算，最后用中国传统的开方术解出小圆径。此题全部解题过程为代数运算。

第二十四题：

“有长椭圆体及圆锥体，椭圆短径等于锥之底径，长径等于锥高，此二体和即等径等高之圆柱。试解其理。”

此题为立体几何证明题，为中国传统算学中所少见。书中选取蔡锡勇课艺，有图、有解，简明清楚。

第二十六题为汪凤藻课艺，现抄录原题如下。

“六面体内容八面体，其二体比例若何。”

此题解法中，不仅给出了正六面体的内容正八面体的具体作

图方法，而且给出了求二体积比例的代数方法。

$$\text{八面体积}=\frac{\text{三}}{\text{甲}\times\frac{\text{二}}{\text{甲}^{\text{三}}}}\qquad\text{六面体积}=\text{甲}^{\text{三}}$$

译为现代数为符号，即

$$V_{\text{八面体}}=\frac{a\cdot\frac{a^2}{2}}{3},\ V_{\text{六面体}}=a^3。$$

据此推断，汪氏可能把一个正八面体看作两个正四棱锥的和，因此用到棱锥求积公式

$$V=\frac{sh}{3}。$$

其中 $h=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$（$a$ 为正六面体的一边）。

$$s=\left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right]^2=\frac{a^2}{2}。$$

最后，汪氏又设甲＝4，用此具体数值分别代入八面体与六面体求积公式，得出 6∶1 这一具体数值。

此问题实际在梅文鼎《几何补编》卷一中曾已论及，但没有给出具体的方法，只给出一些比值。汪氏推陈出新，利用近代数学方法给出了简洁的解题过程。

第二十八至三十七题（除三十二题外），讨论传统垛积术问题，其中包括三角垛三题（二十八、二十九、三十三），垛积截积一题（三十），四角垛一题（三十一），连比例垛一题（三十四），二乘方垛一题（三十五），招差术二题（三十六，三十七）。

其三角垛问题，程度较浅。第二十九题直接利用朱世杰三角垛公式求出层数。

$$\sum^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)\cdots(r+p-1)=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)\cdots(n+p)。$$

最后求层数时，得到一元三次方程：

六积＝天^{三}丄三天^{二}丄二天，

用《数理精蕴》“借根方比例”中开带从立方法。

设 $f(x)=2184-x^3-3x^2-2x$。

因常数项 2184 大于 10^3 而小于 20^3，故以 10 为根的初商。

次商积：$f(10)=2184-(10^3+3\times10^2+2\times10)$

$$=2184-(1000+300+20)=864。$$

次商廉法：$-f'(10)=3\times10^2+6\times10+2=362$。

又，$\dfrac{f(10)}{-f'(10)}=\dfrac{864}{362}=2\dfrac{70}{181}$，取 2 为次商，即

$$x=10+2=12。$$

由此可见《数理精蕴》应该是馆中学生的学习参考书。

第三十一题为四角垛问题。该题摘录于朱世杰《四元玉鉴》卷下果垛叠藏一门中第二问。

“今有四角垛果子一所，共值钱一千三百六十五文，只云最下层每枚值一文，其上逐层每枚递贵二文。求层数若干。

答曰：九层。”

该题立天元建立方程，直接运用四角垛公式：

$$\sum^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-2)(2r+p-2)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(2n+p-1)。$$

第三十五题为王宗福课艺，原题为。

“今有方尺之石块依立方垛之，最下方边十四尺。求石块若干。

答曰：一万一千零二十五块。”

该题运用李善兰《垛积比类》中有关二乘方垛的知识，“二乘方垛有方一、廉四、隅一。方以层数为高，廉以层数减一为高，隅

以层数减二为高。各以三角三乘垛求积术入之”。[①]即

$$\sum^{n} r^3=\sum^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)+4\sum^{n-1}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)+\sum^{n-2}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)。$$

第三十六，三十七两题为传统垛积招差术问题，分别摘自于朱世杰《四元玉鉴》卷中如像招数一门第二和第五问。其三十六题与如像招数第二问不同之处是：前者没有给出“招兵四千九百五十六名”而是求“招兵若干”。第三十七题与如像招数第五问完全一致。

第三十七题为陈寿田与承霖课艺。陈氏给出二术，而且用到了传统的筹算式。陈氏的术与传统算学中解“四次招差”问题的解法大致相同，只不过陈氏的解法更加详明而已。其第一术为“以人数求日数之法”，第二术为“以钱数求日数之法”。承霖利用近代传入的西方代数方法求解。现照录原题与承氏解法主要步骤如下。

“今有将军依立方招兵，初日方边三尺，以后逐日递增一尺。每兵日支钱二百五十文，已招二万三千四百人，支钱二万三千四百六十二千，试推招了几日。

答曰：十五日

$$\begin{matrix}\text{日}\\ \text{数}\end{matrix}=\!=\text{天}$$

$$\frac{\text{二}}{\text{天(天}\perp\text{一)(二七)}}\perp\frac{\text{六}}{\text{(天}\top\text{一)(天)(天}\perp\text{一)(三七)}}\perp$$

$$\frac{\text{二四}}{\text{(天}\top\text{二)(天}\top\text{一)(天)(天}\perp\text{一)(二四)}}\perp$$

① 李善兰．垛积比类．卷二．则古昔斋算学．同治六年刊本

$$\frac{一二〇}{(天\top三)(天\top二)(天\top一)(天)(天\bot一)(六)}$$

$$=\frac{二五〇}{二三\times六二〇〇〇}"$$

最后得开方式：

“𝍮二 二 五 二 三 五 二 〇
⊥ 二 一 六 八
⊥ 三 〇 六 〇
⊥ 一 〇 六 〇
⊥ 一 八 〇
⊥ 一 二”

开方得十五即日数。

事实上，承霖用到了“以钱数求日数之法”的四次内插公式：

$$\sum^{n} f(r)m=[\Delta\sum^{n} r+\Delta^{2}\sum^{n-1}\frac{1}{2!}r(r+1)+\Delta^{3}\sum^{n-2}\frac{1}{3!}r(r+1)\cdot(r+2)+\Delta^{4}\sum^{n-3}\frac{1}{4!}r(r+1)(r+2)(r+3)]\cdot m。$$

其中 $\Delta=27$，$\Delta^{2}=37$，$\Delta^{3}=24$，$\Delta^{4}=6$ 分别为上差，二差，三差，下差。m 为每兵日支钱数。

所以方程为

$$[27\sum^{n} r+37\sum^{n-1}\frac{1}{2!}r(r+1)+24\sum^{n-2}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)+6\sum^{n-3}\frac{1}{4!}r(r+1)(r+2)(r+3)]\times250=23462000,$$

即

$$\frac{n(n+1)\times27}{2!}+\frac{(n-1)n(n+1)\times37}{3!}+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)\times24}{4!}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\times6}{5!}=\frac{23462000}{250},$$

解得 $n=15$。

从承霖的解题过程可以看出，设未知数与最后的开方运算，还保留了中国传统算学中立天元及写成竖式开方的特点，其解题的中间过程全部采用符号进行运算，在形式上与近代数学形式基本一致，这也正是李善兰“合中西为一法”的教学主导思想的体现。

第四十一至四十五题为不定方程问题。第四十一与四十二题为求一术问题。

第四十一题为《孙子算经》卷下第二十六题“物不知数”一题的改编。其题为

“今有物不知数，欲匀分为五则多一数，欲匀分为七则多六数，欲匀分为三则多二数。求原数若干。

答曰：原数四一。”

此题为汪凤藻课艺。汪氏解题时运用传统的大衍总数术进行求解，其立法简明，立式清楚。

第四十三至第四十五题为三元一次不定方程组问题。其题目类型大致相同，今举第四十三题为例。

“今有上物三值五，中物五值七，下物七值三，共物百共值百。求三物各若干。

答曰：上三，中五五，下四二。”

此题为席淦课艺，其解法主要步骤为

$$\text{“一上} \perp \text{一中} \perp \text{一下} = \begin{matrix}\text{共}\\\text{物}\end{matrix}\text{一〇〇}$$

$$\frac{\text{三}}{\text{五上}} \perp \frac{\text{三}}{\text{七中}} \perp \frac{\text{七}}{\text{三下}} = \begin{matrix}\text{共}\\\text{值}\end{matrix}\text{一〇〇}$$

$$\text{中} = \text{二五〇} \top \text{四下} \top \frac{\text{二八}}{\text{一八下}}$$

$$\frac{\text{二八}}{\text{一八下}} = \text{甲}$$

$$\text{一八下} = \text{二八甲}$$

九下══一四甲

中══二五〇丅七甲丅$\frac{\text{九}}{\text{二甲}}$

考中之等数知甲必为九可约之数，如以甲为三六则负数大于二五〇不能减。设为一八则中数大于一百。故知必为二七而得中数为五五。九下等十四甲，则下为四二，而上必为三，中每减五六故知有一答。”

所谓有“一答”，即其满足条件之解惟一。第四十三至四十五题均为《张丘建算经》卷下的最末一题即百鸡问题的改编。百鸡问题是清末畴人研究的一个重要课题。从以上三题的解法可见，同文馆的学生均采用西方近代不定方程组的解法。

第四十六题为蔡锡勇课艺，照录原题如下。

“瓜豆同日发芽生蔓，瓜蔓初日长一尺六寸，以后每日所长递减半。豆蔓初日长一寸，以后每日所长递加半。二蔓第几日相等。

答曰：五日。”

蔡锡勇给出了此类问题的对数算法。译为现代数学符号，即

$$16=1\cdot 2^{(x-1)},$$

$$x-1=\frac{\lg 16-\lg 1}{\lg 2},$$

$$x-1=4,$$

$$x=5。$$

此处用到的对数、指数及指数与对数关系为当时传入的较新的数学内容。我国传统算法以盈不足术求解此类问题，但结果并不准确。因为盈不足术用于线性问题所得答案是准确值，否则为近似值。[1] 该题是《九章算术》卷七第十一题“蒲莞共生”，第十二题“两鼠对穿”改编。

---

① 关于这一点有不同看法。参见曲安京等. 中国古代数理天文学探析. 西安：西北大学出版社，1994，254

此卷课艺大多以甲，乙，丙，丁入算，方程问题中含有二元，三元，四元等方程，设未知数虽仍用中国传统的天，地，人，物，但其运算全用代数式。此卷应为学生学习《代数学》及《几何原本》后所作。

卷三共四十二题均为《测圆海镜》类问题。李善兰于光绪二年(1876)同文馆活字版《测圆海镜》序中称："少习《九章》，以为浅近无味，及得读此书，然后知算学之精深，遂好之至今。后译西国代数、微分、积分诸书，信笔直书，了无疑义者，此书之力焉。盖诸西法之理，即立天元一之理也。今来同文馆，即以此书课诸生，令以代数演之，则合中西为一法矣。"由此可知，《测圆海镜》是同文馆的教材之一。除后九题外，该卷的前三十三题基本上以代数式入算。所有题中都保留了李冶《测圆海镜》卷一总率名号中各勾股形的名称。不同于李冶《测圆海镜》之处在于该卷中添设了合勾股形和断勾股形，使十三率勾股形与大勾股形的勾股弦和较十三事一一对应。[①] 合勾股形和断勾股形在李善兰《九容图表》[②] 中曾出现。在《算学课艺》卷三中共有九题涉及合勾股形和断勾股形，见表 4.2.4。

---

① 钱宝琮，有关测圆海镜的几个问题．见：宋元数学史论文集．北京：科学出版社，1966，P272

② 见：《中国科学技术典籍通汇·数学》第五册．郑州：河南教育出版社，1993

表 4.2.4

题号	主要内容
5	有断弦和较有平句求圆径
6	有断勾股较有大弦和和求圆径
11	有叀弦有断句求圆径
20	有断勾股较有明弦较较求圆径
21	有断勾股较有叀勾弦较求圆径
22	有断勾股较有大弦和和求圆径
23	有大差弦和较有断勾股较求圆径
27	有断股弦较有大中垂线求圆径
29	有合股弦和有断勾弦较求圆径

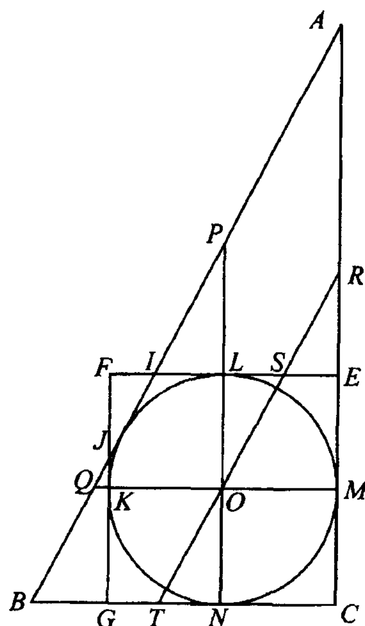


图 4.2.4

如图4.2.4，过圆心O作RT线与大弦AB平行，与FE交于S。与RT线有关的有四个勾股形$\triangle ROM$，$\triangle OTN$，$\triangle RTC$与$\triangle RSE$。$\triangle ROM$为高勾股形，它的三事和等于b。$\triangle OTN$为平勾股形，它的三事和等于a。$\triangle RTC$的股等于高股、平股的和($RC=RM+ON$)，它的三事和等于$a+b$，称为合勾股形。$\triangle RSE$的股等于高股、平股的差($RE=RM-ON$)，它的三事和等于$b-a$，称为断勾股形。李善兰将《测圆海镜》的高勾股形、平勾股形放在适当的位置上，并添设了合勾股形与断勾股形，这使勾股切圆问题的研究形成一个完整的体系。[①]

为了便于我们对此卷进行深入研究，特画圆城图式，如图4.2.5(以下各题均遵循此图符号)。

该卷第二，九，三十题等三题与《测圆海镜》中问题的题设相同。

第二题为长秀课艺，原题为

“有底勾有明股求圆径。”

此题与《测圆海镜》卷四底句一十七问之第四问相合，其为：乙出南门直行一百三十五步，甲出北门东行二百步见乙，问答同前。

此两题皆已知a_3，b_{14}，求圆径。长秀的解法与《测圆海镜》中该题的解法三相同，两题均设半径为天元，以方程

$$2x^3+b_{14}x^2-a_3^2b_{14}=0$$

求出圆的半径。

第九题为斌衡课艺，原题为

“有明弦有底勾求圆径。”

此题与《测圆海镜》卷四底句一十七问之第一十二问相同。此

---

① 钱宝琮．有关测圆海镜的几个问题．见：宋元数学史论文集．北京：科学出版社，1966．272

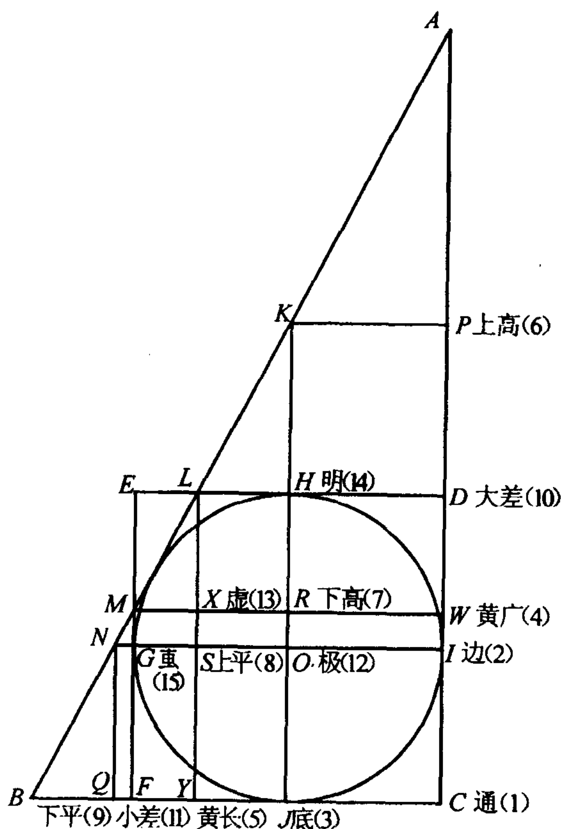


图 4.2.5

问为：见底勾二百步，明弦一百五十三步。问答同前。

此两题皆已知 a_3，c_{14}，求圆径。斌衡是以半径为天元直接入算，最后以一元四次方程

$$x^4+(c_{14}a_3+a_3^2)x^2-c_{14}a_3^3=0$$

求出圆的半径。而李冶是以明勾 a_{14} 为天元，建立一元二次方程

$$0.5x^2+\frac{1}{2}(a_3+c_{14})x-\frac{1}{2}a_3c_{14}=0。$$

解出 x 后，再以公式 $r^2=a_{14}a_3$ 求出半径。

比较两种解法可见：虽然斌衡建立的是一元四次方程，但其不含三次项，故可简化为

$$y^2+(c_{14}a_3+a_3^2)y-c_{14}a_3^2=0$$

求解。而且斌衡是以半径为天元，故其解法较李冶简单。

第三十题为王镇贤课艺，原题为

“有大差弦较较减极弦余四十九尺，小差弦较和减虚弦余一百三十八尺，极勾股较一百十九尺。求圆径若干。”

此题与《测圆海镜》第十一卷杂糅一十八问之第一十三问完全相同。

此题已知 $c_{12}-[c_{10}-(b_{10}-a_{10})]=49$，$c_{11}+(b_{11}-a_{11})-c_{13}=138$，$b_{12}-a_{12}=119$，求圆径。

王镇贤以两种方法解此题，现分别摘录主要过程于下：

方法一：“半径＝＝天

减极弦＝＝甲　　减虚弦＝＝乙　　极较＝＝丙

$$\frac{二乙丅二天}{(二天丅乙)^{二}}＝＝\frac{太}{弦}＝\frac{甲}{丙^{二}}$$

(四天^{二}丄乙^{二}丅四乙天)甲＝＝(二乙丅二天)丙^{二}

四甲天^{二}丄甲乙^{二}丅四甲乙天＝＝二乙丙^{二}丅二丙^{二}天。”

译为现代数学符号，即

设半径为 x，

$$c_{12}-[c_{10}-(b_{10}-a_{10})]=l,$$

$$c_{11}+(b_{11}-a_{11})-c_{13}=m，b_{12}-a_{12}=n,$$

其中 $l=49$，$m=138$，$n=119$。

$$\frac{(2x-m)^2}{2m-2x}=c_{13}=\frac{n^2}{l},$$

$$4lx^2+lm^2-4lmx=2mn^2-2n^2x。$$

整理得

$$4lx^2+(2n^2-4lm)x+lm^2-2mn^2=0。$$

方法二：“半径═══天

$$\frac{二乙\top二天}{乙^{二}}═══\begin{matrix}合\\勾\\股\\和\end{matrix}═══\frac{甲}{丙^{二}}\bot═══天$$

甲乙^{二}═══(丙^{二}⊥二甲天)(二乙丅二天)

甲乙^{二}═══二乙丙^{二}⊥四甲乙天丅二丙^{二}天丅四甲天^{二}”

译为现代符号，即

设半径为 x，

$$\frac{m^2}{2l-2x}=\frac{n^2}{l}-2x,$$

$$ml^2=(n^2-2lx)(2m-2x),$$

$$lm^2=2mn^2+4lmx-2n^2x-4lx^2。$$

整理得

$$4lx^2+(2n^2-4lm)x+lm^2-2mn^2=0。$$

李冶在解这道题时，设太虚弦 c_{13} 为天元，建立一元二次方程

$$-2x^2+\{c_{12}-[c_{10}-(b_{10}-a_{10})]+[c_{11}+(b_{11}-a_{11})-c_{13}]\}^2-(b_{12}-a_{12})^2=0,$$

即

$$-2x^2+(l+m)^2-n^2=0。$$

解出 $x=102$，再用《识别杂记·五和五较》中的公式 $d=c_{11}+(b_{11}-a_{11})$ 求直径。

比较王镇贤与李冶的上述解法可见，二人的解法各有千秋。王氏以天元 x 代半径直接入算一元二次方程，且第二种方法还用到

李善兰在《九容图表》中添设的合勾股形，其解法新颖独特。李氏没有以半径直接入算，但建立的一元二次方程比较易解。

第三十五至四十二题为图解题，相当于现代数学中的图解证明题。这八题均出自于《测圆海镜》卷一识别杂记，见表 4.2.4。

表 4.2.5

《算学课艺》卷三			《测圆海镜》识别杂记	
题号	主要内容	现代符号	主要内容	现代符号
35	二明股弦较等于虚弦和较	$2(c_{14}-b_{14})=(b_{13}+a_{13})-c_{13}$	三事和即大黄方，其较则为两个明弦上股弦较	$a_{13}+b_{13}+c_{13}=d_1$，$(a_{13}+b_{13})-c_{13}=2(c_{14}-b_{14})$
36	虚勾重弦较等于重勾股较	$a_{13}-c_{15}=b_{15}-a_{15}$	重弦上勾股和即小差内减重弦，其较则虚勾内减重弦也	$b_{15}+a_{15}=(c_1-b_1)-c_{15}$，$b_{15}-a_{15}=a_{13}-c_{15}$
37	大股内减边弦等于平勾股较	$b_1-c_2=b_8-a_8=b_9-a_9$	平弦上勾股共即平弦虚勾共也，其较则大股内减边弦也	$b_8-a_8=b_9-a_9=b_1-c_2$ $b_8+a_8=b_9+a_9=c_8+a_{13}=c_9+a_{13}$
38	大股内减平勾股较等于边股平勾和	$b_1-(b_8-a_8)=b_2+a_8$ 或 $b_1-(b_9-a_9)=b_2+a_9$	边弦乃边股平勾共，又为大股内减平弦上勾股较	$c_2=b_2+a_8=b_2+a_9=b_1-(b_8-a_8)=b_1-(b_9-a_9)$
39	重勾股和内减虚股弦较等于重弦	$a_{15}+b_{15}-(c_{13}-b_{13})=c_{15}$	(重弦上)三事和即勾圆差，其较则太虚上股弦较，又为虚勾内减虚黄方也	$(a_{15}+b_{15})-c_{15}=c_{13}-b_{13}=a_{13}-d_{13}$
40	明股重勾相乘等于虚勾股积	$2b_{14}a_{15}=a_{13}b_{13}$	明勾重股相乘倍之为一段太虚积。(明股重勾亦同)	$2a_{14}b_{15}=a_{13}b_{13}$ $2a_{15}b_{14}=a_{13}b_{13}$

续表 4.2.5

《算学课艺》卷三			《测圆海镜》识别杂记	
题号	主要内容	现代符号	主要内容	现代符号
41	高股乘平勾等于明股弦和乘重勾弦和	$b_7a_8=(b_{14}+c_{14})(b_{15}+c_{15})$ 其中 b_6 也是高股，a_9 也是平勾。$b_7=b_6$ $a_8=a_9$	高股平勾相乘得半径幂。明弦明股并，与重弦重勾并相乘得半径幂	$a_8b_6=a_9b_7=r_1{}^2$ $(b_{14}+c_{14})(a_{15}+c_{15})=r_1{}^2$
42	大差勾乘小差股等于虚勾乘大股亦等于边股乘倍重股	$a_{10}b_{11}=a_{13}b_1=2b_2b_{15}$	凡大小差相乘为半段径幂,(大差勾小差股相乘亦同上。)虚勾乘大股得半段径幂,(虚股乘大勾亦同上),边股重股相乘得半径幂	$(c_1-a_1)(c_1-b_1)=\frac{1}{2}d_1{}^2$ $a_{10}b_{11}=\frac{1}{2}d_1{}^2$ $a_{13}b_1=\frac{1}{2}d_1{}^2$ $a_1b_{13}=\frac{1}{2}d_1{}^2$ $b_2b_{15}=r_1^2$

由卷三可推知，李善兰在教学中已将李冶《测圆海镜》的内容加以扩充、完善。这使勾股切圆问题的研究形成了一个完整的体系。其大部分问题均以符号入算，运算过程为代数式表示法。在题末将所得方程改为天元式，并用传统方法开方。此正是李氏“合中西为一法”教学主导思想的充分体现。

卷四为勾股问题及各类应用杂题。在该卷六十题中前二十五题都是和勾股形有关的问题。

其第一题为“造勾股最简之法若何”，即造整数勾股形的最简单的方法。书中选用贵荣课艺，给出三术、六法。

第一术为“取一数”，共二法。

“第一法：设奇数三为勾，自之得九，减一折半得四为股，加一折半得五为弦。”

其一般表达式为：若以任何奇数 $2n+1$ 为勾，则 $\frac{1}{2}\{(2n+1)^2-1\}=2n^2+2n$ 为股，而 $\frac{1}{2}\{(2n+1)^2+1\}=2n^2+2n+1$ 为弦。依此所得之整数勾股形，股弦较恒为 1。[①]

"第二法：设偶数八为勾，折半得四，自之减一得十五为股，加一得十七为弦。"

其一般表达式为：以偶数 $2n$ 为整数勾股形的勾，因得诸整数勾股弦，如 $2n:n^2-1:n^2+1$ 之比。

第二术为"取二数"，共三法。

"第一法：设相连二数三与四相加得七为勾，相乘倍之得二十四为股。股加一得二十五为弦。"

此法可由勾股恒等式

$$[n+(n+1)]^2+[2n\times(n+1)]^2=[2n\times(n+1)+1]^2$$

证出。但实际上，此法与第一术之第一法等价。此三数即 $2n+1$，$2n^2+2n$，$2n^2+2n+1$。

"第二法：设间一二数，三与五。相加得八为勾，相乘得十五为股，股加二得十七为弦。"

事实上，此法又与第一术之第二法等价。设间一之二数为 $n-1$，$n+1$，则有勾股弦为 $2n$，n^2-1，n^2+1。

"第三法：设任取二数，二与六，相乘倍之得二十四为勾，各自之相减得三十二为股，相加得四十为弦。"

按贵荣课艺，即：任取两整数 m，$n(2n<m)$，$2mn$ 为勾，m^2-n^2 为股，m^2+n^2 为弦。取 $m=6$，$n=2$，$2mn=24$ 为勾，$m^2-n^2=36-4=32$ 为股，$m^2+n^2=40$ 为弦成立。贵荣之题设为"任取二数"应满足条件 $2n<m$。

---

① 钱宝琮. 中国数学中之整数勾股形研究. 见：钱宝琮科学史论文选集. 北京：科学出版社，1983. 287

设 $m=3$，$n=2$，$2mn=12$ 为勾，$m^2-n^2=9-4=5$ 为股。$m^2+n^2=9+4=13$为弦，但 $5<12$ 这与股大于勾矛盾。取 $n=1$，即得第一术的第二法。取 $m=n+1$，即得第一术的第一法。

第三术为取三数，只一法。

“设连比例三数二与四与八，首末两率相加折半得五为弦，相减折半得三为勾，中率四为股。”

实际上，此法源自于《数理精蕴》(1723)下编卷十二“定勾股弦无零数法”。其法设 m^2，mn，n^2 为连比例三率，则 m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2 为勾股形之三边。其中，$m>n>0$，$(m,n)=1$，$2\nmid(m+n)$。若所给连比例三率有公约数则就三边中约去之。如本题，所给三率为 $2m^2$，$2mn$，$2n^2$，$m=2$，$n=1$。求得 $2(m^2-n^2)=6$，$4mn=8$，$2(m^2+n^2)=10$，约为 3，4，5。

自明清之际西学输入，《数理精蕴》始有“定勾股无零数法”一篇，国人继起研究整数勾股形造法者颇多。到清代晚期，造整数勾股形已成为一个重要研究课题。李善兰在《天算或问》中对此类问题亦有涉及。虽贵氏均以具体数字为例，未能整理成一般形式，且没有证明，不过从其六法可知，他应该已知上述的一般形式。

该卷有些题目表面看来与传统勾股形问题相似，但实际上又加入西方数学中的边角关系及三角函数。

以第二题题设为例：

“勾股形有对勾股二角有弦和较求勾股弦。其法若何?”

其第三题题设为：

“有勾股较有弦和和，求对句股之二角。其法若何?”

显然已与我国古代算法问题有着明显区别。

此卷十三题以后多用天元术及二元以上高次方程组。

以第十四题贵荣课艺为例：

“有勾幂等于倍股弦和，只云股幂等于九个勾弦和。求勾股弦

各若干。

答曰：勾八，股十五，弦十七。”

此题为求解三元高次方程组，但贵荣并未以李善兰《四元解》中的方法及表示形式解题，而是完全利用代数式运算。该题消元至一元方程后，亦转写成天元式开方。然后此题在列出上述方程求出勾后，不是将勾带入原方程求出股、弦，而是又再列出一种方程组，以股为天元，求出股。最后又以弦为天元，列出方程组，解出弦。这种对每个未知数均列方程组单独求解的作法完全沿用了《四元玉鉴》的旧法。显然还受到传统数学的限制。书中此类问题还有第十六、十八、二十二题。

第二十八题为王文秀课艺，照录原题于下。

“有甲乙二物俱不知价，但云甲价之立方三倍等于乙价之平方，而乙价之立方等于甲价之平方八十一倍，求甲、乙价各若干。

答曰：甲三、乙九。”

王氏解题完全使用筹算表示法，且利用李善兰于《四元解》中之四元消法进行消元运算，可见李善兰选取了他自著的《四元解》为教材。

三、书中的二个错误

原书个别地方有误。兹举二例，作为校读参考。

卷一最后一题(第五十题)：

“有轮船自上海至吴淞往返共八十里需时三点钟，潮水每点钟行二十里，求船行之速。

答曰：三十里零九强，即平速。”

该题在列方程时，误把“二十里”当成“十二里”。应为

$$80x=3x^2-1200,$$

$$x\doteq 37.3。$$

卷二第二十题：

“大圆内容以半径为径之二中圆，复于二隙容二小圆，有大圆

径一万，求小圆径若干。

答曰：一千六百六十六又$\frac{\text{二}}{\text{三}}$。”

此题命天为小圆径，应改为小圆半径，如图 4.2.6。

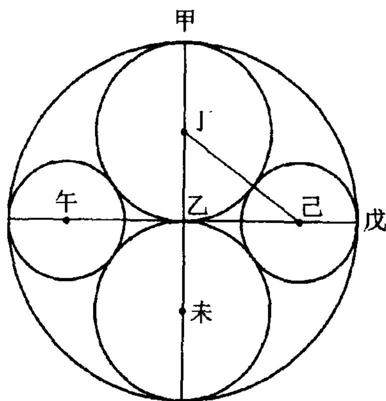


图 4.2.6

故结果当改为

$$x=2323\frac{1}{3}。$$

从《算学课艺》中的一百九十八个问题可以看出，《九章算术》、《张丘建算经》、《测圆海镜》、《四元解》、《重学》、《代数学》或《代数术》应为李善兰的教学用书。《四元玉鉴》及《数理精蕴》可能是馆中学生的重要学习参考书。根据《大清会典》记载，同文馆学生算学程度必须达到下列标准：“凡算学，以加减乘除而入门，次九章、次八线、次则测量，次则中法之四元术，西

法之代数术”。[1] 其中“中法之四元术”可能指李善兰《四元解》中的内容。该书两卷，为李善兰研究朱世杰《四元玉鉴》的成果。《四元玉鉴》突出的成果是四元术，即四元高次方程组的布列及消元法。《算学课艺》卷二中有三题(垛积问题)均摘自于此书。由此可见《四元玉鉴》可能是馆中学生的重要学习参考书。天津图书馆藏有一抄本《数学本原》，书中多处有某某年记于同文馆字样，很有可能为同文馆算学学生的学习笔记。其中大段抄录《数理精蕴》中的原文。《算学课艺》中一些题目的开带从平方，开带从立方的方法也取自《数理精蕴》。可见，《数理精蕴》也应该是馆中学生的重要学习参考书。此外，李善兰很有可能选用《几何原本》作为学生几何学习用书。

从对《算学课艺》研究可以看出，同文馆数学教育涉及内容很广，包含了当时传入的不少西方数学内容和大部分传统数学知识。在西算方面，三角学和代数学两类问题在《算学课艺》课题中所占比例最大；在中算方面，《测圆海镜》与整数勾股形两个方面的研究最为出色。由此可见，在清末数学教育中，中西两种传统在数学教育中并存，但又互相交融。虽然《算学课艺》只是清末的一本算书，但为当时数学教育内容的缩影。从《算学课艺》的解题方法可知，在中国传统数学的题目中，西算方法所占比例较大，而中国传统数学方法所占比例较小。这也说明，清末数学家在研究和学习西方数学的过程中，逐渐地认识到西方数学的先进性，这使他们有意识地改进了中国传统数学的方法，从而使相对于世界数学水平已经落后的中国数学得以进一步发展。

---

① 朱有瓛. 中国近代学制史料. 第一辑上册. 上海：华东师范大学出版社，1986. 75

第三节 刘彝程与《简易庵算稿》

刘彝程是清代末年重要的数学家与数学教育家。在数学研究方面，他在整数勾股形、垛积术等方面有着突出成果。在数学教育方面，他曾于上海广方言馆，上海求志书院执教二十余年，培养出华世芳、崔朝庆、徐谦、支宝枬、陈维琪、缪秋澄等一批活跃的数学家。本节主要叙述刘彝程的生平及其工作。

一、刘彝程生平

刘彝程，字省庵，江苏兴化人，太学生。生卒年不详。[①] 关于刘彝程的传记材料很少，综合其父刘熙载的生平，我们可以得出其生平的大致情况。

《兴化县续志·刘彝程传》称："刘彝程，字省庵，熙载长子。性沈静善思，尝务以实学致用于世。熙载因其材，弱冠示以《加减乘除歌》。"[②]刘彝程在其《简易庵算稿》序中称："自弱冠，先大夫中允公授以正负加减乘除诸法，由是纵观天元、四元诸书。后随侍先大夫之粤，过长沙，遇丁果臣先生，藉观董、项、徐、戴诸家算书。又访邹君特夫于粤东，识李君壬叔于沪渎。"[③]

刘彝程之父刘熙载(1813～1881))为清末重要经学家。刘熙载，字伯简，号融斋。道光二十四年(1844)进士，选庶吉士，散馆授编修。同治初年，刘熙载任国子监司业，后升任左春坊左中允。1864，他受命为广东学政，1866 年，他以老病辞职，赴上海主讲龙门书院，十四年后去世。刘熙载博学多才，"上自六经、子、

---

① 田 淼. 清末数学家与数学教育家刘彝程. 中国数学史论文集. 第三辑. 内蒙古大学出版社，九章出版社(台北)，1992

② 李恭简修. 魏俊，任乃庚撰. 刘彝程传. 续修兴化县志. 1943 年铅印本

③ 刘彝程. 简易庵算稿. 序. 光绪二十六年江南制造局刊本

史、天文、算法，字学、韵学”，“下至词曲及仙释家言”靡不通晓。[①]在天文数学方面，刘熙载曾撰有“天元正负歌”四首[②]及《星野辨》一篇。[③]

刘熙载于 1844～1864 年间在京，刘彝程应于这段时间入太学。彝程对科举仕途不感兴趣，刘熙载对此曾深以为虑，[④]但他并没有限制刘彝程的治学方向。到刘彝程青年时期，刘熙载将《天元正负歌》传授给他。刘彝程由此对于数学发生了浓厚的兴趣，“纵观天元、四元诸书”。1864 年，彝程随侍其父赴任广东，途中于长沙结识著名数学家丁取忠，并读到董祐诚、项名达、徐有壬、戴煦等人著作，“惊为得未曾有”[⑤]。后又于广东结识了邹伯奇。同治五年，熙载引病至沪，刘彝程又结识了李善兰，后李善兰在致华蘅芳信中称刘为“后生可畏者”[⑥]，可见李氏对刘彝程数学才能评价很高。从这一段刘氏接触的数学家与数学著作来看，董、项、徐、戴均为弧矢级数专家，李善兰于此亦有很深造诣。这直接影响了刘彝程中年的数学研究。“由此悉心于弧矢之学，不数年，自

---

① 萧穆．刘融斋别传．续碑传集．光绪九年江苏书局刊本

② 刘熙载“天元正负歌”原文：加法，“同名加为加，正负仍如故。异名减为加，正匀从大数。数若加空位，还从原正负”；减法，“同名减为减，先定本减数。减数减本数，正负仍如故。本数减减数，须要变正负，异名加为减，正负从本数。若但有本数，正负仍如故。若但有减数，须要变正负。何以为本数，乃受减之数。何以为减数，以此往减数”；乘法，“同名乘为正，异名乘为负，同名除为正，异名除为负，有时不便除，即寄法为母”；消法开方法，“相消用减法，任合本减数，开方用加法，递乘递加去。”见：《昨非集》．载：《古桐书屋六种》，光绪丁亥年刊

③ 李恭简修．魏俊．任乃庚撰．刘熙载传．续修兴化县志．1943 年铅印本

④ 刘熙载曾对萧穆谈及此事，曰：查见渊鱼不祥。参见《续碑传集·刘融斋别传》，卷七十五，光绪十九年江苏书局刊本

⑤ 李恭简修．魏俊．任乃庚撰．刘彝程传．续修兴化县志．1943 年铅印本

⑥ 李善兰．致华蘅芳．转引自．李善兰年谱订正及补遗．明清数学史论文集．江苏教育出版社，1990．478

撰著《割圆阐率》（一卷）、《开方阐率》、《对数问答》（一卷）”。[1]丁取忠曾有意将这些著作收入《白芙堂丛书》，但后来以资罄退还。后刘铎将《割圆阐率》收入所辑《古今算学丛书》中。

同治十二年(1873)，傅兰雅与华蘅芳合译《代数术》，此时西方代数学初入我国，“无敢任校算者”，“彝程一见了然，为之校算”，并由此与傅兰雅结为至友。[2]同治十三年，华、傅合译《微积溯源》，刘氏亦任校算，华蘅芳在该书序中称：“书中代数之式甚繁，校算不易，则刘君省庵之力居多”。[3]光绪三年(1877)，刘彝程又担任了《三角数理》的校算。1873 年，冯焌光(？—1878)慕名邀刘彝程任上海广方言馆算学教习。光绪元年(1876)冯氏创办求志书院，又延刘彝程兼任求志书院算学斋斋长。光绪二十四年(1898)刘彝程以老病辞去求志书院数学斋斋长之职，但还继续于上海广方言馆任教。此外，1881 年，刘熙载去世，龙门书院学生公建融斋书院，刘彝程曾为该书院评阅算学课卷。刘彝程著有《上海求志书院算学课艺》一卷，并与沈善蒸合编《广方言馆算学课艺》一卷。1898 年，刘氏收集历年试题及自演之稿编为《简易庵算稿》四卷。刘氏还另有三部著作，《亥加人开立方解证》，《元程九章算略》（与沈善蒸合编），[4]及《简易庵九章实义》(1901)。

综观刘氏一生，对其影响最大的人物当首推其父刘熙载。虽然彝程未步其父后尘成为一位博学大儒曾使刘熙载颇为失望，但是还是带刘彝程进入数学殿堂，并为之创造条件接触当时著名的数学家与数学著作。而刘熙载弃高官而就教育，淡泊为生的生活准则，博采众长，不囿于门户的学术思想，乃致循循善诱，导难

---

① 刘彝程．简易庵算稿．序．光绪二十六年江南制造局刊本

② 李恭简修．魏俊．任乃庚撰．刘彝程传．续修兴化县志．1943 年铅印本

③ 华蘅芳．微积溯源．序．同治十三年江南制造局刊本

④ 丁福保．周云青．四部总录算法编．北京：文物出版社，1984

以易的教育风格，都对刘彝程有着深刻的影响。

就对刘彝程的数学学习与研究而言，长沙结识丁取忠，及后来与邹伯奇、李善兰的交往为其生活的一个转折点。这使其由一名数学爱好者成为一名研究者。虽然当时他并未得到出色的成果，但是毕竟接触了其时中国最先进的数学成果，并也尝试着进行创造。而校算《代数术》、《微积溯源》等书为其数学生涯的另一个重要事件，这使其对当时传入的西方数学知识有了一个较全面的了解。为其后来的研究与教学打下了基础。

二、刘彝程的数学工作

刘彝程的数学工作涉及垛积术、天元术、勾股术、整数勾股形及二次不定方程、三角学、对数、平面及立体几何等多个数学分支。但其成果最为突出的，则在整数勾股形和垛积术两个方面。

勾股形和不定方程都是中国传数学的重要研究课题。勾股形的研究主要为解勾股形，测望及利用勾股公式建立方程等。虽然早在《九章算术》中，已经有了关于整数勾股形的一般研究，[①] 但关于整数勾股形的专题研究开始于《数理精蕴》(1723)下编卷十二的“定勾股弦无零数法”。[②] 此后，陈杰、李善兰等都对这一课题作过研究。刘彝程《简易庵算稿》中有28个整数勾股形及二次不定方程方面的问题，其中有多题为解同积同勾弦和勾股形的问题。

《数理精蕴》下编卷二十四中给出一题，已知勾股形的面积及勾弦和，求解勾股形。书中指出，勾股形之勾满足下述方程：

$$x^2\left(\frac{c+a}{2}-x\right)=\frac{\left(2\times\frac{1}{2}ab\right)^2}{2(c+a)},$$

① 李继闵．《九章算术》及刘徽注研究．西安：陕西教育出版社，1990．376～378

② 钱宝琮．中国数学中整数勾股形研究，见：钱宝琮科学史论文集．北京：科学出版社，1983

其中 $c+a$ 为勾弦和，$\frac{1}{2}ab$ 为勾股积。清中期，汪莱在其《衡斋算学》第二册(1798)中指出，方程

$$x[(c+a)-x]^2=\frac{\left(4\times\frac{1}{2}ab\right)^2}{c+a}$$

可有两个符合题意的正根 $c-a$(共有三正根，另一大于 $c+a$，不合题意)，即，两个不同的勾股形可具有相同的勾股积与勾弦和。通过汪氏的研究成果，还可得到勾弦和与两个勾弦较的关系式

$$c_1-a_1+\sqrt{(c_1-a_1)(c_2-a_2)}+c_2-a_2=c+a,$$

其中 c_1，a_1，c_2，a_2 分别为两形的弦与勾，$c+a$ 为勾弦和。[①] 此后，李善兰及日本学者加悦傅一郎都对上述问题作了进一步研究，并给出求具有如上条件的整数勾股形的方法。但他们都没有给出其具体的研究方法。[②③]

刘彝程以西方代数学方法研究这一问题。1883 年，刘彝程在求志书院设考题研究 $x^2+xy+y^2=z^2$，得出该题的解为 $x=\frac{y^2-u^2}{2u-y}$，$y=y$，$z=\frac{y^2-uy+u^2}{2u-y}$，其中 u 为任意整数。如欲得整数解，则可取二整数 m，n，令 $x=m^2-n^2$，$y=m(2n-m)$，$z=m^2-mn+n^2$，其中 $\frac{1}{2}m<n<m$。此题方法与《代数术》中所述方法一致，刘氏为《代数术》校算，似有所借鉴。同年秋，他设题解同勾弦和，同勾股积的整数勾股形问题，并与前题相联系，给出二勾股形的一个解系：$c_1-a_1=(m^2-n^2)^2$，$c_2-a_2=[m(2n-m)]^2$，$c+a=(m^2-mn+n^2)^2$。此后，刘彝程还得出该题的一些其他解系。

① 李兆华．汪莱方程论研究．见：古算今论．天津科学技术出版社，2000

② 李善兰．天算或问，则古昔斋算学．同治六年刊本

③ 加悦傅一郎．算法圆理括囊．白芙堂算学丛书．同治十二年刊本

限于篇幅，此处不赘。

在上题中，刘彝程主要利用西方不定方程解法解决勾股形问题，在《简易庵算稿》中，他还多次利用中国传统勾股术解决不定方程问题。1884 年，刘彝程设题讨论勾股差为 1 的整数勾股形。取一勾股较为 1 之整数勾股形(a_0, b_0, c_0)(如 3，4，5)，利用一系列勾股变换，刘氏得出

$$\begin{cases} a=2c_0+b_0+2a_0, \\ b=2c_0+2b_0+a_0, \\ c=c_0+2b_0+2a_0 \end{cases}$$

为另一勾股较是 1 的整数勾股形。并进而得出解系：

$$\begin{cases} a_n=2s_{n-1}-b_{n-1}, \\ b_n=2s_{n-1}-a_{n-1}, \\ c_n=2s_{n-1}-c_{n-1}, \end{cases}$$

其中 $s_n=a_n+b_n+c_n$。此式是勾股较为常数的勾股形的通解。任取一勾股形代入，便可得到一族与其有相同勾股较的勾股形。1894 年，刘彝程设题解决 $2x^2-7^2=y^2$ 及 $2x^2+7^2=y^2$。利用传统勾股术中的勾股恒等式 $2c^2-(b-a)^2=(a+b)^2$ 及 $2(a+b-c)^2+(b-a)^2=[(c-a)+(c-b)]^2$，刘氏轻易地将上述两个不定方程化为求解勾股较恒为 7 的整数勾股形的问题。利用前式，取(5,12,13)及(8,15,17)为两个基本勾股形，即可分别得到上述两个不定方程的一个解系。

可以看出，刘彝程在解题过程中很自然地符合了中西数学的研究方法。虽然以勾股术解不定方程往往只能得到一些特殊解系，但其构思巧妙，为解不定方程提供了一个很好的方法。刘彝程无疑是整数勾股形研究方面最杰出的中国数学家之一。

刘彝程在垛积术方面也取得了很多成果，其中最突出的是三角相乘垛求和公式。如图 4.2.7，p 乘三角垛的通项乘 q 乘三角垛通项作为通项求其前 n 项的和，即

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{1}{p!}r(r+1)\cdots(r+p-1)\cdot\frac{1}{q!}r(r+1)\cdots(r+q-1)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{p+1}l_{p,i}l_{q,i}\sum_{r=1}^{n-i+1}\frac{1}{(p+q)!}r(r+1)\cdots(r+p+q-1)。$$

其中 $p\leqslant q$，$l_{p,i}$，$l_{q,i}$分别是贾宪三角形第 p，q 横行从左至右第 i 个数，如图 4.2.8 所示，即

$$l_{p,i}l_{q,i}=\mathrm{C}_p^{i-1}\mathrm{C}_q^{i-1}$$

$$=\frac{p!}{(i-1)!\ (p-i+1)!}\cdot\frac{q!}{(i-1)!\ (q-i+1)!}。$$

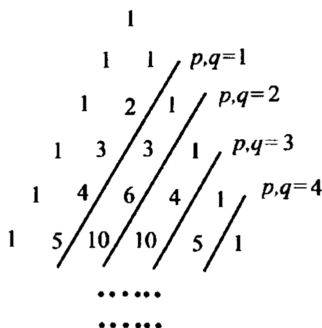


图 4.2.7

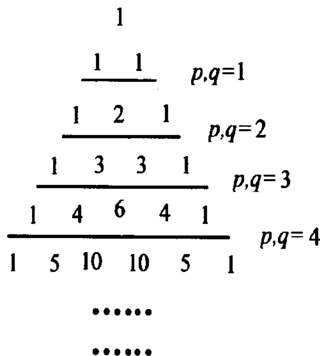


图 4.2.8

当 $p=q$ 时，即为李善兰三角自乘垛。

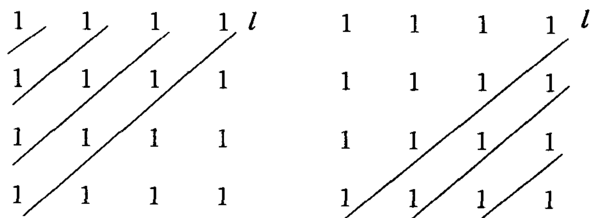
此式为刘彝程于数学研究中最精彩的成就之一，可以用数学归纳法证明该式正确。[①] 刘氏自己也不无得意地说："有此简法，《则古昔斋》诸法可废，即李氏所想及之相乘诸法亦可由该术证其

① 田淼. 刘彝程垛积术研究. 见：数学史研究文集. 第五辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1993

理。”利用这一公式，刘彝程还给出了任意两截积乘积求和公式及一些其他的新垛公式。

刘彝程在其《简易庵算稿》中所给出的垛积运算方法也是值得充分重视的。刘氏以前，朱世杰、李善兰等中算家在垛积方面取得了很大成就，但他们都没有留下关于其运算方法的叙述。刘彝程则较为详细地给出了其演算步骤。

刘氏的垛积方法可称为分割法。以其证明平方垛公式的方法为例，刘彝程认为每一个平方垛可分为两个二乘三角垛。以平方垛第四项为例：



斜线 l 之左为一个一乘四阶垛，斜线之右为一个一乘三阶垛，即

$$4^2=\sum_{r=1}^{4}r+\sum_{r=1}^{3}r=\frac{1}{2!}\cdot 4\cdot 5+\frac{1}{2!}\cdot 3\cdot 4。$$

本其思想，我们可以对平方垛的第 k 个元进行分解，得一类似图形。

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 & l \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots\cdots 1 &
\end{array}
$$

$$k^2=\sum_{r=1}^{k}r+\sum_{r=1}^{k-1}r=\frac{1}{2!}k(k+1)+\frac{1}{2!}(k-1)k。$$

此可视为平方垛求和公式的一般证明方法。将一个未知体积的立体分解为多个已知体积公式的立体，进而推导出所求立体的体积公式，是中国传统数学中的一种常用方法。刘彝程的分割垛积的方法可能是中算家普遍采用的方法，且刘与李善兰素有交往，此法可能与李善兰的垛积运算方法有关。

刘彝程的垛积术工作是在李善兰工作的基础上进行的，并得到了很多成果。从刘氏解题可以看出，他虽力求详细、全面地阐述其计算和证明方式，但其对垛积公式的证明还仅在不完全归纳法。虽然刘氏的证明并不完美，但是其所表达的垛积运算思想却为垛积术的研究方法提供了宝贵的线索，值得中算史家的重视。

刘氏的另一工作在于中西数学的融合方面。中国传统数学有着几千年的发展史，在计算方面有过很多领先于世界的成果，但与19世纪的西方数学却无法等量齐观。刘彝程一直能够比较客观地看待中、西数学，既充分认识到传统数学在算法研究中的成果，也正视西方数学的领先地位。在运算及书写方式上，刘氏以为“夫泥于中法者，恒纠缠文字，论说则不簡明，泥于代数者，恒展卷即演算式，绝不穷其源尾。余力矫此，务溯源于撰题本旨，揭

以示人，往往先抒公理，然后以题合之。”从其《简易庵算稿》的设题中可以看出，刘氏确实在此方面作了很多工作，并试图对传入的西方数学知识给出理论上的阐释，其中大部分内容都是正确的。但由于当时传入的西方数学书籍非常有限，刘氏完全凭借自己的力量进行摸索，致使其对部分数学问题的理解并不全面。在计算方法上，他多次运用西算解传统算法古题，并在测圆类问题中引入角度。同时在西方数学解题思想的指导下，常常运用中国传统的勾股术解决西方数学中的解方程等类问题。从刘氏的解题可以看出，这种中西融合的方法大都是成功的。

三、刘彝程的数学教育工作

刘彝程从事数学教育二十余年，为清末重要的数学教育家之一。1876 年，刘彝程应邀执教于上海广方言馆。

上海广方言馆，1863 年由李鸿章奏设。初设时，仿京师同文馆之名，称为上海同文馆。但与京师同文馆不同，此馆开设之初即将数学列为必修课，并允许学生专习数学，为洋务派创办的最早将数学列为专课的学校。1867 年该馆改名为上海广方言馆，[①]1869 年移入江南制造局。此后，上海冯焌光等又重新拟定了课程十条，其中第六条称“孔门六艺，不废书数。况西人制造日新月异，俱从算学而出。……兹拟每日西学之暇，午后即学习算术，无论笔算、珠算，先从加、减、乘、除、开方入手。中学则熟习算经十书，前贤代有著述，皆可流览；西学则几何、重学、代数诸书，循序而渐进焉。…如性质所近，径免课文，专习算学亦可。至测量制造之法，如学有端绪，即可引与考究”。其数学教学内容为初等算术、代数、几何。

广方言馆历任算学教习计有陈暘（1806—1863，1863 年在

---

① 熊月之．西学东渐与晚清社会．上海人民出版社，1994，336

馆)[1]、时曰醇(1807—1880[2],晚年任广方言馆算学教习[3])、刘彝程、沈善蒸(副教习),天文教习贾步纬及火荣业等等。上海广方言馆学生中,席淦、汪凤藻、严良勋、杨兆鋆等在数学方面都有很深造诣。光绪三十一年,上海广方言馆改为工业学堂。

刘彝程又执教于求志书院。求志书院于1876年由冯焌光筹库银二万两所建。院址于上海治东,漕仓之右。求志书院分经、史、掌故、词章、舆地、算学六斋,经学斋斋长钟文蒸、俞樾,词章斋斋长俞樾,掌故斋斋长高骖麟、杨泗孙、孙锵铭、宋存礼、算学斋斋长刘彝程,舆地斋斋长张焕纶,史学斋斋长孙锵铭、宋存礼,均为一时之选。其课规规定“六斋每季各命题四,听人备卷投交。以教谕为监院,由学署收卷发奖,奖由巡道捐廉。”[4]求志书院办学之初,曾为新学表率,上海县续志称“远近闻风兴起”,[5]宁波辨志文会即仿求志书院所办。甲午以后,求志书院转形陈旧,于1901年停办,共计办学二十余年。

刘彝程自1873年起任数学教师,1876年以后,以其自己所言,多年心血,悉聚于求志算稿中,他毕生最重要的数学著作即集求志书院算学课题及自演算稿所成之《简易庵算稿》。

1901年,刘彝程为初学者编写了一部《简易庵九章实义》。其自序中称:“方今算书汗牛充栋,求其浅近易学,可以入门而无弊者,则罕见之。”“余甚憾之,尝欲自著一书,引申浅近算理,藉示初学津梁。而中年以来,忽忽少暇。光绪初,父执湘阴郭筠仙侍郎(郭嵩焘)奉命使英。过沪谓余曰,是行携有出洋学生,将使

---

① 冯桂芬. 西算新法直解序. 西算新法直解. 光绪丙子年吴县冯氏校邠庐刊本

② 时曰醇生卒年代引自李兆华:时曰醇《百鸡术衍》研究. 数学史研究文集. 第二辑. 1991

③ 诸可宝. 时曰淳传. 畴人传三编. 卷五. 商务印书馆,815~816

④ 俞樾. 求志书院课规. 上海县续志. 民国间刊本

⑤ 俞樾. 上海县续志. 民国间刊本

学算，宜以何书入门？余对以向乏善本，无已，惟有自著。郭公怂恿速成，并任剞劂。逾年，公归国，予无以应，惟谢以异日而已。”前年编“《简易庵算稿》，时定兴鹿芝轩(鹿传麟)尚书抚三吴，见而称善，又谓，是盖未易问津，劝别撰简要门径之书，启牖来学。”余“遂乃屏绝尘事，尽半年之暇，撰为是编。”[①]该书分比例，面、体积，方程，勾股四卷，每卷又分上下两部分。上部分讲解该卷主要数学内容及运算方法，下部分以该算法演《九章算术》或《测圆海镜》中原题。该书纯为初学所写，不涉及高深算学内容。

在教学方面，从教学方法上，刘彝程的教学注重启发。刘氏自己曾言：“余之命题，无论深浅，唯以新颖确实为主。盖凡一物一理，骤观之了无佳趣，及触类旁通，引伸不已，尽有当前易知之境，而古今人从未道及者。故算学诸理，一经推阐，则机关渐启，见解不与众同。”从其《简易庵算稿》设题亦可发现，该书虽为一综合性试题集解，而题目则可按学科分为数种。每种题目由浅入深，互为衔接。且有理论，有应用，自成章节。刘氏常将一难题分为若干小题，为学生理解与掌握新知识提供阶梯。尤其是其“前题又法”，每次反复均力求深入，对启发学生的思维及锻练其解题灵活性均会起到很大作用。即使是会考试题，刘氏亦坚持“先抒题理，然后以题合之。遂觉如石投水，浅易明显。”重点在于传授知识，不在于以难题检验，表现出一个教育家成熟的教学风格。

刘彝程的教学内容重在中、西交融及较新研究成果的推广。《简易庵算稿》的内容可谓中、西各半，除垛积等课题为传统数学内容外，其他课题多是中、西互通。这种以西法解中国古题及以中国传统数学方法解决西方问题的方法为清末数学家所普遍采

---

① 刘彝程．九章实义．序．光绪二十七年刘氏简易庵石印本

用。这不仅是数学研究中的一种趋势，对于传授新知识及方法也可收到突出效果。当学生发现新知识中有熟悉的方法、内容，且以西法解传统数学问题可收到事半功倍的效果，这无疑可以激发学生的学习热情，并能使他们较容易地掌握新知识。正如刘氏弟子徐谦所云，“自先生以题诲人而后，代数虽属西法，而人乃视为己有矣”。[①]此外，对于当时数学界比较活跃的研究课题，刘氏总是很快将其最新成果介绍给学生。如整数勾股形、垛积术等。这便增强了学生的研究能力，这些都是非常可取的。当然刘氏数学中也有不足之处，如教学中缺乏一些课题，例如微积分，且部分内容亦有一些错误。

刘彝程的教学态度是非常认真的。刘氏称：“余之命题，必使学者绝无别解，犹恐一时疏忽贻误，乃以题成之后必先演稿证之，藉以自信。”[②]治学之严谨可见一斑。其对学生之关怀亦可于《简易庵算稿》中找到证据。徐谦称其“不以蕴蓄自秘，不以坚深自文，诲人唯恐不知，语人不厌其详。”[③]垛积课题中，刘氏以陈维祺解法与己不同而颇为赞赏，在《算稿》中特选陈氏课艺。1896年，沈善蒸推广刘氏整数勾股形研究成果，以本勾股较为另形之勾股和，自极小勾三股四弦五起分途互求，推得一切整数勾股形。撰表列举，一网无遗。刘氏在甲午冬二题后称：“沈君粒民，推广此术”，“余始见而疑之，”“即思”“乃信其一无遗漏，卷仅数帙，遂成专书，余深喜有同志焉”。[④]钟爱之情溢于言表。

刘氏从教二十余年，以徐谦所云：“方今海内能算之士，半出先生门下。”[⑤]此语虽有夸张之虞，亦可见其成就斐然。刘彝程在其

① 徐谦. 简易庵算稿. 跋. 光绪二十六年江南制造局刊本
② 刘彝程. 简易庵算稿. 序. 光绪二十六年江南制造局刊本
③ 徐谦. 简易庵算稿. 序. 光绪二十六年江南制造局刊本
④ 刘彝程. 简易庵算稿. 卷二. 光绪二十六年江南制造局刊本
⑤ 徐谦. 简易庵算稿. 跋. 光绪二十六年江南制造局刊本

《简易庵算稿》序中称："历年课艺佳作綦多，其尤可称推许而素识者，如支雯甫(宝枬)、沈粒民(善蒸)、陈仲周(维祺)、崔聘臣(朝庆)、华若溪(世芳)、缪秋澄(朝铨)，其未识面而知名者如汤子寿(金铸)，其素识而已逝者如廖子忠(家绶)。"[①]上述诸人后均为清末数学专家并皆有著述传世，其中支、沈、崔、华、汤、廖亦曾任数学教师。由于求志书院课试面向上海所有士子，所以不能肯定诸人是否均曾入该院肄业。其中刘氏称汤金铸素未谋面，显然非其入室弟子。沈善蒸为上海广方言馆算学副教习，不应算作求志书院正式肄业生。缪朝铨自称："余之习数也无师，皆从暗中摸索而得"，[②]应不是求志书院及刘彝程的学生。至于华世芳、陈维祺、崔朝庆等人，则有证据表明曾入学求志书院。

廖家绶(1860—1890)，一名家寿，号子忠，湖南长沙人。"少聪敏，有俊材。梅启照荐入江宁算学书院。曾应求志书院算学课试。光绪八年应边防大臣吉林将军希元之聘，为吉林表正书院算学教习。"一世英锐之士，多出其门。光绪十二年为吉林省测绘地图。"图成，议叙五品衔归部铨选县丞。"著有《勾股边角释术》一卷，《续勾股六术》一卷，《测圆海镜翼》二十卷，《修竹斋杂著》若干卷，藏于家。从其经历上看，亦未入求志书院学习。

陈维祺于1889年编成《中西算法大成》。是书仿"《数理精蕴》之例，取新旧著译各种汇成一编，删繁订误"而成。包括了当时中国传统数学及传入的西方数学知识的主要内容。该书由刘彝程任鉴定，求志书院其他肄业生"叶君子成，朱君吉臣鹤汀，李君煜廷"及"海盐于君衡南"均参与了该书的编辑、校订、绘图等工作。可以说是求志书院师生集体工作的成果。从1889至1898

① 刘彝程．简易庵算稿．序．光绪二十六年江南制造局刊本

② 缪朝铨．秋澄算稿．自序．光绪壬辰刊本

九年间，“各书坊私用原本缩小翻印，三次行销至七千部之多。”[①]该书于光绪二十七年重印，对当时数学知识的传播起到了一定的推动作用。

求志书院尚有其他算学生，其中叶耀元(即上述之叶子成)，吴县人，著有《形学补编》、《测圆海镜图解》二卷[②]，《勾股》两本，并编有《新学报》，报中刊有很多数学内容。冯澂著有《强自力斋集》，并曾在南菁高等学堂任西学课长。

除在求志书院培养的学生外，刘彝程在广方言馆及融斋书院也培养出一了批学生。光绪十九年，广方言馆收得算学生三名，李鸿杭、龚杰、朱祖梁。其中龚杰，字子英，元和人。著有《立方奇法》一卷、《古歌解》、《求一捷术》及《续勾股六术》二卷，并曾为刘彝程所著《简易庵算稿》绘图。此外，刘彝程族弟刘循程也在上海广方言馆学习数学。融斋精舍学生张爔撰有《堆垛术》等书。

总之，刘彝程是清代末年重要的数学家与数学教育家。在数学研究方面，他的工作涉及当时国内几乎所有活跃的数学研究分支，并在整数勾股形及垛积术方面有突出的成果。在数学教育方面，他培养了一批活跃的数学家与数学教师，为中国数学在清末的普及作出了很大贡献。

① 闵廷德．中西算法大成．禁止私自翻刻启示．光绪二十七年铅印本

② 叶耀元．形学补编．古今算学丛书本．光绪戊戌算学书局石印本

第四节 陈志坚及其《求一得斋算学》

陈志坚(1844—?)[①]，字思九[②]，号紫简[③]，江苏省新阳县(今江苏省昆山市)人[②③]。光绪五年己卯科(即公元1879年)举人。[②③]“学问渊博，于经史性理外，兼精天算之学。”[④]自述：“坚往读《史记·历书》、《汉书·历律志》等篇，往往不得其解，则不禁掩卷叹曰：士人固不可不习算哉！因于《九章算术》等书稍稍措意。惟其时方角逐名场、奔驰南北，未皇深究其术也。自庚寅公车报罢，遂绝意进取，乃得萃中法之天元、西法之借根代数。博览而深探之，渐渐得窥崖略。”[⑤]由此可知，陈志坚于1879年中举之后，原想继续求取功名，直至1890(庚寅)考进士不第后才“绝意进取”，开始专心研究数学。他在光绪二十二年(1896)至宣统三年(1911)间任江苏省青浦县[⑥]教谕，[②⑦]官阶为“内阁中书衔加三级”[⑦]。在此期间，陈志坚在青溪书院、融斋精舍和南菁高等学堂讲授过数学。除进行数学教学和研究外，陈志坚晚年曾参与编纂《(民国)昆新两县续补合志》。此志于民国八年(1919)成稿，民国十二年(1923)刊行。

陈志坚的后半生致力于数学教学和研究，其数学著作有《微积阐详》五卷(共二册)，《求一得斋算学七种》十一卷(共三册)，

---

① 李俨．三十年来中算史料的发现．见：李俨．中算史论丛．第二集．北京：中国科学院出版，1954．46

② (民国)青浦县续志．卷十二

③ (光绪)昆新两县续修合志．卷十八

④ 陈志坚．微积阐详·张爔序．光绪三十二年(1906)，松江稽文墨斋刊本

⑤ 陈志坚．求一得斋算学·自序，光绪三十年(1904)，松江稽文墨斋刊本

⑥ 现为上海市青浦县。

⑦ (民国)昆新两县续补合志．卷九

包括《李氏勾股术补》一卷，《连分数开方》一卷，《演无定式》三卷，《三角新理》三卷，《整勾股释术》一卷，《粟布术广》一卷和《杂题类存》一卷。在陈志坚的数学研究中，关于整数勾股形和连分数的成果较为突出。

陈氏的《整勾股释术》一卷，为其《求一得斋算学》第九卷。该卷的短序说："整数勾股肇端于勾三股四弦五，层累而上，万亿京垓不可究极。而要惟勾方股方并与弦方等为立法之宗，由斯而变化之、错综之，且旁推而交通之，则无量数之整勾股可求。且凡同弦或同勾或同股，或同任和与任较，或同积同弦和，其整勾股无不可求，且无不可立式以求。"陈氏在该卷对整数勾股形问题进行了较全面的讨论，在清代诸多对整数勾股形的研究中，其若干结果有独到之处。

第一题为求整勾股各三事公式，系讨论整数勾股形的造法。陈志坚用连比例三率法给出五术。

一术："任取大小二数(无论奇偶)，各自乘相减为勾(或股)，相加为弦，二数相乘，倍之，为股(或勾)，求得三事必俱为整数。若三事俱偶，则半之为得数，若仍为俱偶，则再半之，以弦得奇数为止。以下准此。"

记大数$=m$，小数$=n$，勾$=a$，股$=b$，弦$=c$，规定$b>a$，则术文给出公式

$$a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2。\tag{1}$$

对于公式(1)的获得，陈氏给出如下解释：

由$a^2+b^2=c^2$，得$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$，令$b=m$，$c-a=n$，即有$c+a=\frac{m^2}{n}$，各以n乘，即得$c+a=m^2$，$c-a=n^2$，$b=mn$，和、较相减，半之，得c与a，不半则倍其b，得(1)式。

二术：$a=m^2+2mn$，$b=2n^2+2mn$，$c=m^2+2mn+2n^2$。　(2)

由连比例三率式：

大差：和较=和较：倍小差，

即

$$(c-a):(a+b-c)=(a+b-c):[2(c-b)]。$$

令 $m=a+b-c$，$n=c-b$，则$\frac{m^2}{2n}=c-a$，各以 $2n$ 乘，得

$$m^2=c-a,\ 2n^2=c-b,\ 2mn=a+b-c,$$

由此得

$$a=2mn+2n^2,\ b=2mn+m^2,\ c=m^2+2n^2+2mn。$$

为使 $b>a$，依陈氏术文，取

$$a=2mn+m^2,\ b=2mn+2n^2,\ c=m^2+2n^2+2mn。$$

依照类似的方法，陈氏给出：

三术：$a=2mn-n^2$，$b=2m^2-2mn$，$c=2m^2+n^2-2mn$。 (3)

四术：$a=m^2-2mn$，$b=2mn-2n^2$，$c=m^2+2n^2-2mn$。 (4)

五术：$a=n^2+2mn$，$b=2m^2+2mn$，$c=2m^2+n^2+2mn$。 (5)

陈氏给出的五术可以化成相同的形式，可以认为它们是互相等价的。

一术：$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$；

二术：$a=m^2+2mn=(m+n)^2-n^2=m_1^2-n_1^2$，$b=2n^2+2mn=2(m+n)n=2m_1n_1$，$c=m^2+2n^2+2mn=(m+n)^2+n^2=m_1^2+n_1^2$；

三术：$a=2mn-n^2=m^2-(m-n)^2=m_2^2-n_2^2$，$b=2m^2-2mn=2m(m-n)=2m_2n_2$，$c=2m^2+n^2-2mn=m^2+(m-n)^2=m_2^2+n_2^2$；

四术：$a=m^2-2mn=(m-n)^2-n^2=m_3^2-n_3^2$，$b=2mn-2n^2=2(m-n)n=2m_3n_3$，$c=m^2+2n^2-2mn=(m-n)^2+n^2=m_3^2+n_3^2$；

五术：$a=n^2+2mn=(m+n)^2-m^2=m_4^2-n_4^2$，$b=2m^2+2mn=2(m+n)m=2m_4n_4$，$c=2m^2+n^2+2mn=(m+n)^2+m^2=m_4^2+n_4^2$。

陈氏以这五术为基础，着重讨论了有公共量的两个整数勾股形的构造，其中对同积同勾弦和两整勾股形的求法的透彻分析，是当时其他数学家没有做到的。

陈氏在本卷十四、十五两题对同积同勾弦和两整勾股形的求法进行了详细讨论。

第十四题为“问求同积同勾弦和(或股弦和)两整勾股形，衡斋汪氏但用带纵立方明理而求，法未著；海宁李氏、长崎加悦氏(见《圆理括囊》)著有法矣，而法所从立未详。学者憯焉。亦可如前数题造立公式且释其术所由著乎？曰：可。”

此题李善兰在《天算或问》中给出求两形的方法为：令

首率$=4m^2n^2$，

末率$=\left[\frac{m^2-n^2}{2}+(m-n)m\right]^2$，

中率$=[m(m^2-n^2)+2(m-n)m^2]n$。

首率、末率分别为二勾弦较，首、中、末三率和为公勾弦和，此时即可求出两形的弦与勾，则两股可求，于是两形之各三事俱得。

日本人加悦傅一郎所著《算法圆理括囊》一书的附录第三题亦论此题，他直接给出求两整勾股形各事的公式：

右弦$=(m^2+mn+n^2)^2+(2mn+n^2)^2$，

右勾$=(m^2+mn+n^2)^2-(2mn+n^2)^2$，

左弦$=(m^2+mn+n^2)^2+(m^2-n^2)^2$，

左勾$=(m^2+mn+n^2)^2-(m^2-n^2)^2$，

右股$=2(m^2+mn+n^2)(2mn+n^2)$，

左股$=2(m^2+mn+n^2)(m^2-n^2)$。

陈志坚对于此题又给出了五术，并且五术均给出了解释。

一术(术文略)公式为：

$a_1=(m^2+mn+n^2)^2-(m^2-n^2)^2$，

$b_1=2(m^2+mn+n^2)(m^2-n^2)$，

$$c_1=(m^2+mn+n^2)^2+(m^2-n^2)^2,$$
$$a_2=(m^2+mn+n^2)^2-(2mn+n^2)^2, \quad (6)$$
$$b_2=2(m^2+mn+n^2)(2mn+n^2),$$
$$c_2=(m^2+mn+n^2)^2+(2mn+n^2)^2。$$

由于汪莱已经指出，有勾股积、勾弦和求勾股形，必得两勾弦较。同时他也指出了勾弦和与两勾弦较的关系①：若$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a_1b_1=\frac{1}{2}a_2b_2$，$c+a=c_1+a_1=c_2+a_2$，则

$$(c_1-a_1)(c_2-a_2)=\{(c+a)-[(c_1-a_1)+(c_2-a_2)]\}^2,$$

也即有 $c_1-a_1+\sqrt{(c_1-a_1)(c_2-a_2)}+c_2-a_2=c+a$。

由此看出，同积、同勾弦和两整勾股形的两勾弦较必为连比例三率的首、末二率，勾弦和必为三率和。陈志坚从这个结论出发，指出因各率均取整数，故两勾弦较必为正平方数，于是勾弦和必为正平方数。凡根数为连比例三率和，则乘得之方亦必为三率和。②因而取一题一术的连比例三率和的平方作为本题的连比例三率和，即取

---

① 李兆华. 中国数学史. 台北：文津出版社，1995. 292

② 证明如下：

设 p, q, r 为连比例三率，则有 $q^2=pr$，且三率和为 $p+q+r$. 证明$(p+q+r)^2$也是连比例三率和。

$$\begin{aligned}(p+q+r)^2&=p^2+q^2+r^2+2pq+2pr+2qr\\&=p^2-2pr+r^2+q^2+2pq+4pr+2qr\\&=(p-r)^2+pr+2pq+4q^2+2qr\\&=(p-r)^2+pr+2pq+4q^2+r^2+4qr-2qr-r^2\\&=(p-r)^2+(p-r)(2q+r)+(2q+r)^2。\end{aligned}$$

取首率$=(p-r)^2$，末率$=(2q+r)^2$，中率$=(p-r)(2q+r)$，此即表明$(p+q+r)^2$也是连比例三率和。

$$(m^2+mn+n^2)^2=\frac{1}{2}(c+a),$$

$$首率=(m^2-n^2)^2=\frac{1}{2}(c_1-a_1),$$

$$末率=(2mn+n^2)^2=\frac{1}{2}(c_2-a_2),$$

$$中率=(m^2-n^2)(2mn+n^2)=\frac{1}{2}\sqrt{(c_1-a_1)(c_2-a_2)},$$

则两勾股形各三卝可求。陈氏同时还作出如下的解释："本为两勾弦较与和，而兹命为半较、半和者，缘加减后虑有不受除，故省一二除，故必倍其两根相乘为股。若所得三卝俱偶，则半之或再半之为得数。"

二术公式：

$$\begin{aligned}
a_1&=[n^2+n(m+n)+(m+n)^2]^2-[(m+n)^2-n^2]^2,\\
b_1&=2[n^2+n(m+n)+(m+n)^2][(m+n)^2-n^2],\\
c_1&=[n^2+n(m+n)+(m+n)^2]^2+[(m+n)^2-n^2]^2,\\
a_2&=[n^2+n(m+n)+(m+n)^2]^2-[2n(m+n)+n^2]^2,\\
b_2&=2[n^2+n(m+n)+(m+n)^2][2n(m+n)+n^2],\\
c_2&=[n^2+n(m+n)+(m+n)^2]^2+[2n(m+n)+n^2]^2。
\end{aligned}\tag{7}$$

以一题二术的连比例三率和自乘，为本题的三率和，以 $[(m+n)^2-n^2]^2$ 为首率，$[2n(m+n)+n^2]^2$ 为末率，同法可得公式(7)。

三术公式：

$$\begin{aligned}
a_1&=[(m-n)^2+m(m-n)+m^2]^2-[m^2-(m-n)^2]^2,\\
b_1&=2[(m-n)^2+m(m-n)+m^2][m^2-(m-n)^2],\\
c_1&=[(m-n)^2+m(m-n)+m^2]^2+[m^2-(m-n)^2]^2,\\
a_2&=[(m-n)^2+m(m-n)+m^2]^2-[2m(m-n)+(m-n)^2]^2,\\
b_2&=2[(m-n)^2+m(m-n)+m^2][2m(m-n)+(m-n)^2],\\
c_2&=[(m-n)^2+m(m-n)+m^2]^2+[2m(m-n)+(m-n)^2]^2。
\end{aligned}\tag{8}$$

以一题三术的连比例三率和自乘，为本题之三率和，以 $[m^2-(m-n)^2]^2$ 为首率，$[2m(m-n)+(m-n)^2]^2$ 为末率，同法可得公式(8)。

同样地，以一题四术的连比例三率和自乘，为本题之三率和，以 $[(m-n)^2-n^2]^2$ 为首率，以 $[2n(m-n)+n^2]^2$ 为末率，可得四术公式：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= [n^2+n(m-n)+(m-n)^2]^2-[(m-n)^2-n^2]^2,\\
b_1 &= 2[n^2+n(m-n)+(m-n)^2][(m-n)^2-n^2],\\
c_1 &= [n^2+n(m-n)+(m-n)^2]^2+[(m-n)^2-n^2]^2,\\
a_2 &= [n^2+n(m-n)+(m-n)^2]^2-[2n(m-n)+n^2]^2,\\
b_2 &= 2[n^2+n(m-n)+(m-n)^2][2n(m-n)+n^2],\\
c_2 &= [n^2+n(m-n)+(m-n)^2]^2+[2n(m-n)+n^2]^2。
\end{aligned}
\tag{9}
$$

以一题五术的连比例三率和自乘为本题之三率和，以 $[(m+n)^2-m^2]^2$ 为首率，以 $[2m(m+n)+m^2]^2$ 为末率，可求得五术公式：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= [m^2+m(m+n)+(m+n)^2]^2-[(m+n)^2-m^2]^2,\\
b_1 &= 2[m^2+m(m+n)+(m+n)^2][(m+n)^2-m^2],\\
c_1 &= [m^2+m(m+n)+(m+n)^2]^2+[(m+n)^2-m^2]^2,\\
a_2 &= [m^2+m(m+n)+(m+n)^2]^2-[2m(m+n)+m^2]^2,\\
b_2 &= 2[m^2+m(m+n)+(m+n)^2][2m(m+n)+m^2],\\
c_2 &= [m^2+m(m+n)+(m+n)^2]^2+[2m(m+n)+m^2]^2。
\end{aligned}
\tag{10}
$$

(6)～(10)式可以化成相同的形式，可以认为它们相互等价。那么，陈志坚给出的五术与李善兰术和加悦氏术有没有关系呢?本卷第十五题作出了回答。

第十五题 “问：前五术，一术即《括囊》中法，余四术理原一贯，然皆出李术之外，而立术较简、算理无穷，信矣。李氏三

率之式谅与前理无殊。亦可明其造术所由，且变之使归一例乎？曰：可。”

术文相当于给出下面的公式：

$$a_1=[(m+n)^2+m^2-n^2+(m-n)^2]^2-[(m+n)^2-(m-n)^2]^2,$$
$$b_1=2[(m+n)^2+m^2-n^2+(m-n)^2][(m+n)^2-(m-n)^2],$$
$$c_1=[(m+n)^2+m^2-n^2+(m-n)^2]^2+[(m+n)^2-(m-n)^2]^2,$$
$$a_2=[(m+n)^2+m^2-n^2+(m-n)^2]^2-[2(m^2-n^2)+(m-n)^2]^2,$$
$$b_2=2[(m+n)^2+m^2-n^2+(m-n)^2][2(m^2-n^2)+(m-n)^2],$$
$$c_2=[(m+n)^2+m^2-n^2+(m-n)^2]^2+[2(m^2-n^2)+(m-n)^2]^2。$$

其造术之意是取$(m-n)^2$为勾弦较，m^2-n^2为股，$(m+n)^2$为勾弦和作连比例三率，[①] 将此三率和自乘，为本题之三率和，由此知

$$首率=[(m+n)^2-(m-n)^2]^2=4(4m^2n^2),$$
$$末率=[2(m^2-n^2)+(m-n)^2]^2=4\left[\frac{m^2-n^2}{2}+(m-n)m\right]^2,$$
$$中率=[(m+n)^2-(m-n)^2][2(m^2-n^2)+(m-n)^2]$$
$$=4[m(m^2-n^2)+2(m-n)m^2]n。$$

可以看出，陈氏所设的三率与李善兰所设的三率相同，故得到的解等价。

至此，陈志坚对同积、同勾弦和两整勾股形的研究已很透彻。他不但给出自己的方法，还对李善兰术与加悦氏术给以解释，并将诸术统一起来。[②]

《求一得斋算学》卷二为《连分数开方》。陈志坚在此卷对连分数的性质进行了一些研究。他在给出的术文中说：“连分数开方，

① 在一题一术中，$m^2=c+a$，$mn=b$，$n^2=c-a$。令$m=p+q$，$n=p-q$，即得此处连比例三率。

② 在一题四术中取连比例三率n^2，$n(m-n)$，$(m-n)^2$，求其和的平方(m^2-mn+n^2)为本题三率和，以$[2n(m-n)+(m-n)^2]^2$为首率，$[n^2-(m-n)^2]^2$为末率，即得刘彝程的结果。

其式厥有数端：有二数循环之连分数，有同母之连分数，有同母正号之连分数，有同母负号之连分数，有异母负号之连分数。”对连分数的这几种情形，陈氏一一作了说明。

连分数之式如
$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ddots}}}} \tag{11}$$

即二数循环连分数，因其二数循环，所以可以写为 $x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+x}}$，整理，即有 $x^2+bx=\frac{b}{a}$，由二次方程的求根公式得到：

$$x=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{b}{a}}。 \tag{11'}$$

连分数之式如
$$x=\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\ddots}}}} \tag{12}$$

即同母连分数，因其同母，所以又可以写为 $x=\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+x}}$，整理，即有 $x^2+ax-b=0$，由二次方程的求根公式得到：

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}。 \tag{12'}$$

令 $a=2$，$b=4$，代入(11′)式取＋号，得$\sqrt{6}=2+x$，再由(11)式，得
$$\sqrt{6}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ddots}}}} \tag{13}$$

此即二数循环式；

令 $a=4$，$b=2$，由(12′)式取+号，得

$$\sqrt{6}=2+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\cfrac{2}{4+\ddots}}} \tag{14}$$

此即同母正号式；

令 $a=2$，$b=-6$，代入(11′)式取−号，得$\sqrt{6}=3-x$，再由(11)式，得$\sqrt{6}=3-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{6-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{6-\ddots}}}}$　(15)

此即异母负号式；

令 $a=-6$，$b=-3$，代入(12′)式取−号，得

$$\sqrt{6}=3-\cfrac{3}{6-\cfrac{3}{6-\cfrac{3}{6-\ddots}}} \tag{16}$$

此即同母负号式。

(13)～(16)式的获得，必须先设公式的原因是“乃以明连分数所由生之理”。陈氏指出：“其实径取一任何数之方根式更互变之，所得式亦必无异。”他用“更互变之”的方法逐个求出(13)～(16)式，现仅以(13)式为例来说明。

$\sqrt{6}=2+\sqrt{6}-2$，而$\sqrt{6}-2=\dfrac{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}{\sqrt{6}+2}=\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{6}+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{6}}{2}-1}$，于是$\sqrt{6}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{6}}{2}-1}$，又由于$\dfrac{1}{2}\sqrt{6}-1=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)(\sqrt{6}+2)}{\sqrt{6}+2}=$

$\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}=\dfrac{1}{4+\sqrt{6}-2}$，故 $\sqrt{6}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\sqrt{6}-2}}=2+$

$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{6}}{2}-1}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\sqrt{6}-2}}}}$，如此层递代入，

即得 $\sqrt{6}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}$，这就是(13)式。

陈氏所谓的“更互变之”，就是逐次应用分子有理化的方法，并将结果逐次代入。这种方法至今仍是简单实用的方法。无怪乎陈氏说：“无论任何数求根，无不如是。”

我们看到，(13)～(16)式都是 $\sqrt{6}$ 的连分数表示式，它们之间应当有一定的关系。先列出由各式得到的各次渐近分数，以便比较：

(13)	(14)	(15)	(16)
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{1}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{6}$
$\frac{22}{9}$	$\frac{44}{18}$	$\frac{27}{11}$	$\frac{81}{33}$
$\frac{49}{20}$	$\frac{196}{80}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{441}{180}$
$\frac{218}{89}$	$\frac{872}{356}$	$\frac{267}{109}$	$\frac{2403}{981}$
$\frac{970}{396}$	$\frac{3880}{1584}$	$\frac{1455}{594}$	$\frac{13095}{5346}$

…　　…　　…　　…

可以看到，(13)式与(14)式相同，(15)式与(16)式相同，而且(13)、(14)两式中的数是“略大略小相间”，(15)、(16)两式中的数是“由大而渐小”。(15)、(16)两式中的偶数项又与(13)、(14)两式中的偶数项相等。以上这些，既不是巧合，也不是特殊情形，它们体现出了几个一般的规律。

(15)、(16)两式相等，表明同母负号式与异母负号式是等价的，它们可以互化：

$$x=\cfrac{b}{a-\cfrac{b}{a-\cfrac{b}{a-\cfrac{b}{a-\ddots}}}}=\cfrac{b}{a-\cfrac{b}{a-x}}=\cfrac{1}{\cfrac{a(a-x)-b}{b(a-x)}}=\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}-\cfrac{1}{a-x}}$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}-\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}-\cfrac{1}{a-\ddots}}}}。$$

(13)、(14)两式相等，表明同母正号式与二数循环式是等价的，它们可以互化：

$$x=\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\ddots}}}}=\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+x}}=\cfrac{1}{\cfrac{a(a+x)+b}{b(a+x)}}=\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}+\cfrac{1}{a+x}}$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}+\cfrac{1}{a+\ddots}}}}。$$

由此看出，陈氏所说的“异母负号式”实际上是递减的循环连分数，“二数循环式”实际上是递加的循环连分数。因而，陈氏给出的四种连分数式，实质上都是循环连分数。之所以又分为递

加和递减两类，从现代数学的观点看来，是因为无理数的有理逼近的逼近方式不同。在求近似值的计算时，就会表现为运算次数的不同。因而，在研究连分数，特别是循环连分数的性质时，只要选择其中的一种加以考虑就可以了。陈氏选择的是同母正号式，也就是二数循环的连分数。我们知道，在现代的初等数论中有下面的定理：[①]

若 $f(x)\doteq ax^2+bx+c$ 是一个整系数二次不可约多项式，α 是 $f(x)=0$ 的一个实根，则表示 α 的简单连分数是一循环连分数。所以陈氏的选择是正确的。他同时也发现了无限简单连分数的一个性质：[②]

设 $[a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$ 是简单连分数，$\frac{p_k}{q_k}(k=1,2,\cdots)$是它的渐近分数，则

$$\frac{p_{2(k-1)}}{q_{2(k-1)}}>\frac{p_{2k}}{q_{2k}},\quad \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}>\frac{p_{2k-3}}{q_{2k-3}},\quad \frac{p_{2k}}{q_{2k}}>\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}。$$

这就是(13)、(14)两式中的数字“略大略小相间”的原因。至于(13)～(16)式中的偶数项相等这一现象，我们现在可以给出解释：无限简单连分数$<a_0, a_1, a_2, \cdots>$一定是收敛的，也就是说，设 $r^{(n)}=<a_0, \cdots, a_n>$是它的第 n 个渐近分数，那么一定存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}r^{(n)}=\theta$。[③]

陈氏在发现了这几个性质后，据(11′)、(12′)两式列出了一些大于$\sqrt{2}$的正无理数的连分数表示式，并说：“无论何数，依呷式[④]皆可作循环连分数，依吃式[⑤]皆可作同母连分数，且同母式作之

① 闵嗣鹤，严士健．初等数论．第二版．北京：高等教育出版社，1997．146

② 闵嗣鹤，严士健．初等数论．第二版．北京：高等教育出版社，1997．137

③ 潘承洞，潘承彪．初等数论．北京：北京大学出版社，1997．322

④ 即(11′)式.

⑤ 即(12′)式.

尤易。四以下其首项必为四之根数二，九以下其首项必为九之根数三。而分母必为首项根数之倍。其分子必为本数与小于本数之正方数之较。”这即是给出了用连分数表示无理数的公式：

$$\sqrt{c^2+b}=c+\cfrac{b}{2c+\cfrac{b}{2c+\cfrac{b}{2c+\ddots}}}$$

$$\sqrt{c^2-b}=c-\cfrac{b}{2c-\cfrac{b}{2c-\cfrac{b}{2c-\ddots}}}$$

在这一卷的最后，陈志坚给出了一个“有前率可求后率之公理：法以首项为倍数以乘原法，再加原实得后率之法。以本方数为倍数乘原法，加首项乘原实即后率之实。”这相当于给出了求连分数的逐次渐近分数的递推公式。

依照陈氏的方法，可求得$\sqrt{c^2+b}$和$\sqrt{c^2-b}$的各个渐近分数：

㈠ $\frac{c}{1}$，

㈡ $\frac{2c^2\pm b}{2c}$，

㈢ $\frac{(4c^2\pm 3b)c}{4c^2\pm b}$，

㈣ $\frac{(8c^2\pm 8b)c^2+b^2}{(8c^2\pm 4b)c}$，

㈤ $\frac{(16c^2\pm 20b)c^3+5b^2c}{(16c^2\pm 12b)c^2+b^2}$，

㈥ $\frac{(32c^2\pm 48b)c^4+18b^2c^2\pm b^3}{(32c^2\pm 32b)c^3+6b^2c}$，

…　　…

我们可以将$\sqrt{c^2+b}$的渐近分数用递推公式表示出来：

$P_1=c, P_2=(c^2+b)Q_1+cP_1$，$P_k=(c^2+b)Q_{k-1}+cP_{k-1}$，

$$Q_1=1,\ Q_2=cQ_1+P_1,\ Q_k=cQ_{k-1}+P_{k-1}。\tag{19}$$

在现代连分数理论中，有下面的递推公式①

若连分数 $[a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$ 的渐近分数是$\frac{p_1}{q_1}$，$\frac{p_2}{q_2}$，…，$\frac{p_n}{q_n}$，…，则在这些渐近分数之间，下列关系成立：

$$\begin{aligned}&p_1=a_1,\ p_2=a_2a_1+1,\ p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2},\\&q_1=1,\ q_2=a_2,\ q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}。\end{aligned}\tag{20}$$

容易证明，公式(19)是公式(20)的特例。

陈志坚对连分数的渐近分数的特点观察细致，因而对连分数理论的探究要多一些。同时，经过比较可以发现，陈志坚对循环连分数性质的发现、给出的“更互变之”的算法及“有前率可求后率之公理”，都是《代数术》中没有的。

《微积阐详》是陈志坚编著的一本关于微积分的教科书。该书签题“最新详阐微积教科书”，诸卷之首行题“微积阐详”，下署“求一得斋述算”。陈氏解释说：“是编就前人成法纂辑成书，虽添撰新题颇多，究与自作有殊，故每卷首行以‘述算’字别之。”

《微积阐详》共五卷，现将目录列出。

卷一·微分一(十八款)：凡例，论函数微分，叠微分，马氏术，戴氏术，诸自变数之函数，论函数极大极小，求函数极大极小捷法；

卷二·微分二(二十九款)：繁函数，指函数，对函数，圆函数；

卷三·微分三(十六款)：曲线义，用微分推曲线之四线法，求各种曲线微分，曲线面微分，曲线体之曲面微分，曲线体积微分；

卷四·积分一(二十一款)：积分总论，各种微分之积分，级

① 闵嗣鹤，严士健．初等数论．第二版．北京：高等教育出版社，1997．136

数求积分法，弧线微分之积分，助变之法，圆函数微分之积分，合名微分之积分；

卷五·积分二（四款二十二支）：用积分术令曲线改直线之理，求曲线面积，求曲面积，求曲线体积。

陈志坚在该书自序中说："自咸同间，《代微积拾级》、《微积溯源》二书先后译行，其术乃传中土，顾《溯源》理窟深奥，读者猝难领解；《拾级》则浅深有序、门径易窥。惟是列款虽详，诠题务简，尚非按时授课之书。方今朝廷锐意兴学，广辟校舍，高等学以上微分积分编为课程，其不可无完备教科书，必也。坚于斯术，究心有年，粗窥崖略，为不揣冒昧，取二书中尤关要理者得如干款，厘为五卷，名'微积阐详'。题之缺者补之，式之简者详之，务使教者便于指授，学者易于会心而后已。"

该书首页系江苏学院呈送此书至学部的咨文："为咨送事，照得高等学堂算学一科必须研究微分积分，始符高等程度。查微积之术，海内所传习者，只《代微积拾级》、《微积溯源》两书，精深奥衍，于教科未能合宜。日本亦有微积教科简本，间有译出者，亦嫌简略不适于用。兹有青浦县教谕陈志坚，夙精数学，于微积苦志钻研，著有《最新详阐微积教科书》一种，呈阅本部院。查得是书于微积确有心得，实能阐述《拾级》、《溯源》两书，沿波讨源、条分缕析，五卷精密显豁，以之备高等学堂课本，似尚属繁简得宜。特行咨送。"

由此看来，陈氏的《微积阐详》确实是作为教科书来编写的，它在当时有一定的影响。清末的其他微积分著作，如《微积集证》、《微积通诠》等都不是作为教科书来出版印行的，可以认为，《微积阐详》是国人自己编写的第一本微积分教科书。

陈志坚的数学工作涉及到很多数学内容。其《李氏勾股术补》系对李锐《勾股算术细草》中没有给出详细解答的题目依照天元术补出细草，"以祝初习天元者"。其《演无定式》三卷是对

不定方程的研究和讨论。第一卷共8题，讨论三个内容：多元一次不定方程组——“物不知数”问题的推广，“百鸡问题”——三色差分，“求一术别题”——二元一次不定方程。第二卷共3题，讨论四色差分问题。第三卷共28题，讨论一类特殊的多元二次不定方程。他对第一卷的三类问题统一用不定方程(组)来求解，表明他已认识到二元一次不定方程和一次同余式是可以相互转化的。对前两卷中的不定方程，陈氏的解法是将四色差分化为三色差分，再将三色差分化为二色差分，最后求解二色差分。而陈氏求解二元一次不定方程的方法，与在他之前的诸多数学家的方法不同，与现代初等数论教科书中的方法相同。第三卷讨论的多元二次不定方程，系数没有什么变化，而未知元的个数逐渐增加，陈氏本卷的意图似乎是以二次不定方程为工具来研究整数的性质。其《三角新理》三卷讨论平面三角形中边、角、高线、面积间的互求，有些题目的解法比较灵活，但其内容和难度与今日中学数学中的解三角形相当。其《粟布术广》是对丁取忠等人所撰《粟布演草》的推广和补充，不但将《粟布演草》中有些问题用代数和对数求解，使问题求解不再繁难，还构造新题多道，在解题中体现出连比例的妙用。在《求一得斋算学》的最后一种——《杂题类存》中，他对球面三角、三角函数、对数、垛积、开高次方等也有一定的研究。

第五节 周达及其《福慧双修馆算稿》

周达，谱名明达，字美权，又字梅泉。清光绪五年(1879)出生在安徽建德县(今东至县)纸山坑周村一个书香门弟。1949年2月9日在上海病逝。① 他自幼就喜好数学，自言：“余束发受书即喜

① 胡炳生．周达的家世和业绩述略．中国科技史料，1994，15(1)：22，26

研求算数之学，治之甚勤，且笃家藏古算书，尽发而读之，凡九章、缉古、天元、大衍、海镜、玉鉴诸书，靡不遍观而尽识。复旁搜历代明历观象之作，暨国朝梅、江、王、薛、项、戴、徐、李之书，洞观而知其要，湛思渺虑，思自树异于古昔作者之表已。又得墨海书馆、制造局所译西算，读之，通代数、微积，取与古书印证，得其会通之旨，成法既娴，乃时时出新义著书。"[①]由于他的聪明和勤奋，20岁时即著有《求勾股整数术》和《三角和较术解》二书。

周达的青年时代是在扬州度过的。他自己曾有记述："庚辛之际，海内鼎沸，余独蠖处邗上，闭户草元，成书十余种，垛积、循环小数即成于其际也。同时治斯学者，有江都张剑虹、仪征佘雨东、慈溪叶遴孙、丹徒包墨棻、江宁徐啸崖，皆砥行笃学之士，创知新算社于邗上，嘤鸣和声，商榷得失，相期于千载之上，不以世俗之谤誉为愉戚也。"[①]这里提到的"知新算社"是我国最早的民间数学团体，[②]周达被推举为该社的社长。

1902年冬天，周达受知新算社的委托，第一次出访日本，回国后写成《调查日本算学记》，详细记载了这件事，该书大体上反映了当时中、日两国数学界的基本状况，因此是一本很有价值的史料。[③]周达的调查涉及三个方面：数学教育、数学书刊之出版情况及数学家。他在书中介绍了日本大学和中学的数学课程的设置，以及日本当时翻译的西方数学书籍和日本人自己编写的数学书，特别是教科书和数学杂志。周达这次去日本会晤了十多名日本数学工作者，其中最主要的是上野清和长泽龟之助，会晤期间讨论

① 周达．福慧双修馆算稿·自叙．宣统元年(1909)，维扬刊本

② 李迪．我国现代数学的先驱者周达．见：李迪．中国科学技术史论文集(第一集)．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．256

③ 李迪．我国现代数学的先驱者周达．见：李迪．中国科学技术史论文集(第一集)．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．261～263

了许多有关数学研究与教学的问题。长泽还曾将古希腊帕普斯(Pappus)的一条定理，即所谓一个“巴氏累圆奇题”提示给周达。周达回国后即对这个“奇题”进行了研究，把自己的研究成果写成一本小册子出版，这就是《巴氏累圆奇题解》。这本小书很快传到日本，其中一部分被译为日文，广为流传。

通过这一次访问日本，周达认识到日本当时翻译西方数学著作的程度和水平已经超过中国，并且日本年年增译欧美新著。而“其时吾国学子方竞译和文肤浅之书，递相涂附，而讵知洞渊窔微、发明奥旨。”[①]周达认为：“东人著书，凡皆稗贩西籍。泝流穷源，允当先河后海，如徒乞灵重译、醊其糟醨，则咫见尺闻，安所期于宏远？”[①]于是他“于癸甲之间，勤治旁行斜上之学，通其词性文体，购求西儒近世杰作，读之金玉渊海、骇目醉心。始知曩者中、东所译陈编，半皆彼中所弃为糟粕者也。自兹以降，未敢轻言作述，惟思博观深造，以彼中名理妙义输告吾党，一洗向者译本之陋。”不幸的是，戊申(1908)年春天，他家中失火，“旧著十余种胥成灰烬，仅垛积、小数、累圆诸书以朋好录有副本得以幸存。”但是对于数学这门使他“钵肝锼心之学”，周达说：“敝帚之珍，未能忘情，乃拾取旧稿之仅存者数种，付之剞劂，以志吾生因缘之一。吾治学有锐力而无恒心，训诂、考据、词章、金石之学，皆尝涉猎，有所得辄弃去，无竟学者。独算学一端，治之绵历十五年无间，疾病、寒暑，乃至山川行旅、船唇马足之间，手一编不少辍，精思所到，自谓超越前人，而不竟其绪，仅以戋戋者传于世，讵吾之素志也欤？”[①]

周达对数学学习和研究有如此浓厚的兴趣和深厚的感情，使

① 周达. 福慧双修馆算稿·自叙. 宣统元年(1909)，维扬刊本

得他能在数学方面有不少论著。他的数学著作有以下各种：[1]

《勾股三角求整数术》，

《三角和较术解》，

《周美权算学》十种：《数之性情》、《九九支谈》、《几何求作》、《几何原点论》、《勾股三角公式》、《曲线新理》、《顺序组合及等次积》、《开六乘方奇法》、《孔球解》、《弧角脞录》，

《平圆互容新义》，

《知新算社课艺初集》，

《巴氏累圆奇题解》，

《数根性情考》，

《福慧双修馆算稿》四种：《垛积新义》、《垛积余义》、《循环小数性情考》、《圆理奇侅》，

《调查日本算学记》。

周达的数学成就主要在初等几何、数论、垛积(级数)三个方面。

《平圆互容新义》是周达完成于1900年的一篇初等平面几何论文。他在序中说："平圆交互相容，其理极繁赜杂糅，不可以平常几何之法驭之，间尝深思而得其故。知须藉径于圆锥三曲线，理幽趣奥，实于形学中别开一径，不可无专书以发明之。爰为之首列三款以明其理，次设诸题以竟其用。凡向之所谓繁赜杂糅无法可驭者，今皆视为坦途。三曲之妙用，真不可测哉。"[2] 这表明了该书的基本内容和思想，即是以二次曲线去解决复杂的平圆互切问

① 李俨．近代中算著述记．见：李俨．中算史论丛．第二集．北京：中国科学院出版，1954．165～166

② 转引自李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．387

题。这在我国初等几何研究中是一种新方法。[1]全书首先给出三款：[2]

第一款：设两圆相交或内切或内离，在两圆间作切圆，则切圆圆心的轨迹是椭圆。

第二款：设两圆相外离、外切和相交，它们的切圆圆心的轨迹是双曲线(只有一支)。

第三款：一圆与一直线相离、相切、相交，它们的切圆圆心的轨迹为抛物线。

对于这三款，周达都给出了正确的证明。这三款实际上是三条定理，相当于椭圆、双曲线、抛物线这三种二次曲线的几何定义。但周达的出发点不是研究二次曲线，是为了研究切圆问题。在此基础上，周达解答了十道几何问题，大体可以分为两类：一类是求切圆圆心的轨迹，一类是通过轨迹的交点确定切圆的圆心，这里所用的轨迹就是上面的三款。[3]

周达在此基础上又作了进一步的研究，不仅解决了古希腊时帕普斯留下的所谓“巴氏奇题”，还完成了《圆理奇侅》一书。此书分三十款，有些款下有“系”，内容主要是容圆及其切点轨迹和圆心轨迹问题。其中第二十二到二十七款是这类问题的典型，归结起来是这样一个命题：“凡与同一平面上的两圆(相内离、外离、相割，也可有一圆是直线)相切而又自相切的两动圆的诸切点之轨迹为一圆。动圆圆心之轨迹为二次曲线。”

周达对于轨迹的研究，在我国数学史上是较早的，在他以前还少有人研究这类课题。

---

① 李迪．我国现代数学的先驱者周达．见：李迪．中国科学技术史论文集(第一集)．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．271

② 改用现代数学语言表达。

③ 李迪．中国现代数学的先驱者周达．见：李迪．中国科学技术史论文集(第一集)．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．273

在数论方面，周达也进行了一些研究，取得了一些成果。他所著的《循环小数性情考》、《数根性情考》等都是这方面的专书。《数根性情考》主要论述关于素数判别法问题。他将此问题分为两类。第一类，凡素数具有某种性质；第二类，凡数(应指正整数)有某性质则为素数。周达在数论方面的贡献主要在于给出一个不定方程的解。大约在1900年时，他研究了不定方程$\sqrt{2x^2\pm1}=y$的整数解问题。

对于$\sqrt{2x^2-1}=y$，令$x_0=a^2+b^2$，$y_0=a^2-b^2$，$z_0=2ab$，其中a，b为任意整数。

又令$x_1-y_1=x_0+y_0=2a^2$，$x_1-z_1=x_0+z_0=(a+b)^2$，

由此可得
$$\begin{cases}x_1=(2a+b)^2+a^2,\\ y_1=(2a+b)^2-a^2,\\ z_1=2a(2a+b);\end{cases}$$
再令$x_2-y_2=x_1+y_1$，$x_2-z_2=x_1+z_1$，由此可得x_2，y_2，z_2。照此过程继续下去，作到第n次，有
$$\begin{cases}x_n=(c_na+c_{n-1}b)^2+(c_{n-1}a+c_{n-2}b)^2,\\ y_n=(c_na+c_{n-1}b)^2-(c_{n-1}a+c_{n-2}b)^2,\\ z_n=2(c_na+c_{n-1}b)\times(c_{n-1}a+c_{n-2}b);\end{cases}$$
其中系数满足下式：
$$c_n=2c_{n-1}+c_{n-2}(n\geqslant2),\ c_0=1,\ c_1=2。$$

令$a=1$，$b=0$，则有$x_n=c_n^2+c_{n-1}^2$，$y_n=c_n^2-c_{n-1}^2$，此即为$\sqrt{2x_n^2-1}=2y_n\pm1$的解，只要给出c_n，c_{n-1}的值，便可求出一组解。令$x=x_n$，$y=2y_n\pm1$(n是奇数时，取“+”；n是偶数时，取“−”。)，即可求出不定方程$\sqrt{2x^2-1}=y$的解。

关于$\sqrt{2x^2+1}=y$的解法，周达将其转化为解$\sqrt{2s_n^2-(-1)^n}=d_n$，其中$s_n=s_{n-1}+d_{n-1}$，$d_n=2s_{n-1}+d_{n-1}$，且令$s_0=1$，$d_0=1$，

则

$$s_1=1+1=2,\quad d_1=2+1=3;$$
$$s_2=2+3=5,\quad d_2=2\times 2+3=7;$$
$$s_3=5+7=12,\quad d_3=2\times 5+7=17;$$
$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$

凡下标为奇数者为$\sqrt{2x^2+1}=y$的解，下标为偶数者为$\sqrt{2x^2-1}=y$的解。

周达在垛积方面的成果，主要集中在《垛积新义》和《垛积余义》中。

《垛积新义》序称："垛积之术滥觞于《九章》之商功、少广……朱氏《玉鉴》乃畅其流。国朝汪孝婴、董方立、罗茗香、傅九渊诸家并有作述。至李秋纫氏著《垛积比类》，枝分条贯，推阐无遗，读者叹观止矣。顾因题立术、就术演草，仅明条段，未揭根源一贯之旨，或有间焉。金匮华若汀氏以积较演垛积，不必逐步换形，但取本术如法布衍，无不曲折赴题，综诸杂糅归于易简。所谓立法之法、造数之数，后来居上，讵不然欤？迩来研求泛倍数之理，积思所通，悟得垛积新义，创为三术。"[①]

第一术，析任何n乘垛为同层增乘各三角垛。设n乘垛的高(层数)为x，积(该层之和)为$f(x)$，可令

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x(x+1)}{1\cdot 2}+a_3\frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+a_{n+1}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)},\qquad(1)$$

其中a_0，a_1，a_2，…，a_{n+1}为泛倍数，即今之待定系数。令x分别取0，1，2，…，$n+1$，则可得到一个方程组

① 周达．垛积新义·序．宣统元年，维扬刊本

$$
\begin{cases}
f(0)=a_0, \\
f(1)=f(0)+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}, \\
f(2)=f(0)+2a_1+3a_2+4a_3+\cdots+(n+2)a_{n+1}, \\
\qquad \cdots\cdots \\
f(n+1)=f(0)+(n+1)a_1+\dfrac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}a_2+ \\
\qquad \cdots+\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}a_{n+1},
\end{cases}
$$

然后根据所要解决的具体问题，将已知条件代入，解此方程组，可求得诸系数 $a_i(i=1,2,\cdots,n+1)$，再代入(1)式，即得所求之垛。周达于《四元玉鉴》“茭草形段”、“果垛叠藏”两门中各选一题为例，说明了第一术的用法。

第一术中各个系数无规律可循，必由解方程组后才能得到。为了计算方便，周达列出了一乘垛至五乘垛求诸系数的公式。现将四乘垛各项系数公式列出：

$$
f(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x(x+1)}{1\cdot 2}+a_3\frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+
a_4\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+a_5\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}。
$$

$a_0=f(0)$,

$a_1=-5f(0)+15f(1)-20f(2)+15f(3)-6f(4)+f(5)$,

$a_2=10f(0)-40f(1)+65f(2)-54f(3)+23f(4)-4f(5)$,

$a_3=-10f(0)+45f(1)-81f(2)+73f(3)-33f(4)+6f(5)$,

$a_4=5f(0)-24f(1)+46f(2)-44f(3)+21f(4)-4f(5)$,

$a_5=-f(0)+5f(1)-10f(2)+10f(3)-5f(4)+f(5)$。

第二术，析任何 n 乘垛为减层增乘各三角垛，设 n 乘垛的高(层数)为 x，积(该层的和)为 $f(x)$，可令

$$
f(x)=a_0+a_1x+a_2\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+a_3\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+
$$

$$\cdots+a_{n+1}\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}。\tag{2}$$

令 x 分别取 0，1，2，…，$n+1$，代入(2)式，得方程组

$$\begin{cases} f(0)=a_0, \\ f(1)=a_0+a_1, \\ f(2)=a_0+2a_1+a_2, \\ f(3)=a_0+3a_1+3a_2+a_3, \\ \quad\cdots\cdots \\ f(n+1)=a_0+(n+1)a_1+\dfrac{(n+1)n}{1\cdot 2}a_2+\cdots+a_{n+1}。\end{cases}$$

由此可求得诸系数 $a_i(i=1, 2, \cdots, n+1)$。将它们代入(2)式，可得所求之垛。

周达给出了求诸系数的公式，名曰“径求公式”：

$$\begin{aligned} &a_0=f(0), \\ &a_1=f(1)-f(0), \\ &a_2=f(2)-2f(1)+f(0), \\ &a_3=f(3)-3f(2)+3f(1)-f(0), \\ &a_4=f(4)-4f(3)+6f(2)-4f(1)+f(0), \\ &a_5=f(5)-5f(4)+10f(3)-10f(2)+5f(1)-f(0), \\ &a_6=f(6)-6f(5)+15f(4)-20f(3)+15f(2)-6f(1)+f(0), \\ &\quad\cdots\cdots \end{aligned}$$

同时指出：“公式中各倍数与开方表同，但每间一项易其正负耳。”这个规律。

第三术，析任何$(n-1)$乘垛为多乘方，x 及 $f(x)$的意义与前两术同，可令

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n。\tag{3}$$

令 x 分别取 0，1，2，…，n，可得方程组

$$\begin{cases} f(0)=a_0, \\ f(1)=f(0)+a_1+a_2+\cdots+a_n, \\ f(2)=f(0)+2a_1+4a_2+\cdots+2^n a_n, \\ \quad\cdots\cdots \\ f(n)=f(0)+na_1+n^2a_2+\cdots+n^n a_n。\end{cases}$$

由此求得诸系数 $a_i(i=1, 2, \cdots, n)$，代入(3)式，即得所求之垛的表示式。

第三术中的各个系数也无规律可循，必由解方程组方能得出。为了计算时的方便，周达列出了一乘垛至五乘垛求诸系数的公式，现将其三乘垛公式照录如下：

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4。\tag{4}$$

$$a_0=f(0),$$

$$a_1=\frac{1}{12}[-25f(0)+48f(1)-36f(2)+16f(3)-3f(4)],$$

$$a_2=\frac{1}{24}[35f(0)-104f(1)+114f(2)-56f(3)+11f(4)],$$

$$a_3=\frac{1}{12}[-5f(0)+18f(1)-24f(2)+14f(3)-3f(4)],$$

$$a_4=\frac{1}{24}[f(0)-4f(1)+6f(2)-4f(3)+f(4)]。$$

在给出了三术之后，周达又对这三术的公式进行了讨论。第二术公式中的诸系数与“贾宪三角形”中诸数相同，这一规律周达已经指出。第一、三两术从整体来看，诸系数没有表现出规律性，但是从局部来看，有的系数确有规律可循。周达指出，“各项倍数皆无秩序，惟末项之倍数则有秩序，且与开方表合，是即一贯之理所在也。……推之各乘垛莫不皆然，惟间一项易其正负耳。”

事实的确如此。如第一术四乘垛的末项

$$a_5=-f(0)+5f(1)-10f(2)+10f(3)-5f(4)+f(5)$$

即符合这一规律；第三术三乘垛的末项

$$a_4=\frac{1}{24}\left[f(0)-4f(1)+6f(2)-4f(3)+f(4)\right]$$

也符合这一规律，只是以 $24=(3+1)!$ 为分母。周达又指出："以后每增一乘即多一递加数为分母耳。"

掌握了这一规律，我们很容易就能写出末项的公式，而其余各项又可由末项求得。以第三术三乘垛为例：

$$a_4=\frac{1}{4!}\left[f(0)-4f(1)+6f(2)-4f(3)+f(4)\right]$$

即为已知，代入(4)式，移项，得

$$f(x)-a_4x^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3。$$

令 $f_1(x)=f(x)-a_4x^4$，即有

$$f_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3, \tag{5}$$

这样就将三乘垛变为二乘垛。二乘垛的末项

$$a_3=\frac{1}{3!}\left[-f(0)+3f(1)-3f(2)+f(3)\right]$$

代入(5)式，移项，得

$$f_2(x)=f_1(x)-a_3x^3=a_0+a_1x+a_2x^2$$

此时又将二乘垛变为一乘垛，则诸系数可求。

任何乘垛均可仿此递推，至一乘垛止，求各项系数。第一术中求诸系数亦同此例。

上述垛积求和三术具有一般性，其中尤以第二术简明实用。其系数 $a_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 为 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的诸阶差分，可列差分表计算，关于 x 的多项式为诸乘三角垛，可以公式求得。该术实为朱世杰、华蘅芳招差术的发展，其形式与牛顿插值公式相同。

《垛积余义》给出了"求三角类垛之捷术"，"无论何乘之垛，

苟知其首两层即可求其全积，又可任求本类中他乘垛之积。"[1]周达此法的依据是“凡三角类各垛，其第一层之积必为一，第二层之积必为其少一乘之垛一、二两层积相并”。[2]这样，先求出一乘垛的积作为二乘垛的底，又可求出二乘垛的积，再以之为三乘垛的底，可求出三乘垛的积。如此递推，可求诸乘垛的积。周达列出了至五乘垛的求积公式，并举出了三个例题。在《垛积余义》中周达还以二乘方垛和三角二乘垛为例给出了“有底求积术”。以现今的观点看来，这实际上是已知高阶等差级数的通项求其前 n 项和。在本卷的最后，周达给出了“微积求乘方垛术”，即是用微分和积分求高阶等差级数的前 n 项和。在叙述过程中，周达还解释了不定积分中加积分常数 C 的理由。

在与《福慧双修馆算稿》出版的同一年，周达还校刻《决疑数学》于扬州。他在书末加了个附录，名为《司忒林公式解证》，系对《决疑数学》中提到的“司忒林公式”给出一种“代数”证明。这是我国第一篇研究司忒林(J. Stirling，1692—1770，英国数学家)公式的论文，[3] 证明仅用到对数与指数的变换以及极限和级数知识。

周达不仅自己从事数学研究，而且尽个人之力积极推动我国数学的发展。

1914 年暑期，在美国留学的任鸿隽、胡明复、杨铨、赵元任等人创立“科学社”，刊行《科学》杂志。次年改组为“中国科学社”，除编辑出版《科学》外，每年组织学术年会(常年会)和其他科学活动。1918 年该社迁回国内，成为中国最早的综合性科学团

---

① 周达．垛积余义·序．宣统元年(1909)，维扬刊本

② 周达．垛积余义．宣统元年(1909)，维扬刊本

③ 李迪．中国现代数学的先驱者周达．见：李迪．中国科学技术史论文集，第一集．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．265

体，它也是当时影响最大的科学团体。它的活动对民国时期中国现代科学的传播与发展，起了很大的促进作用。但在开始阶段，它是民间组织，活动经费全靠社员会费和各界赞助。周达曾给予大力赞助。由于他对科学社的特殊贡献，1918 年 8 月，在中国科学社首次在国内举行的常年会上，已是社员的周达被授与“特殊会员”的荣誉称号。1923 年，中国科学社上海社友会成立，周达被选为第一届理事长。[①]

1928 年春，周达将自己“历年来收藏中、英、日文数学书籍及杂志 530 余种，价在万金以上”全部捐赠给中国科学社，以作创办数学研究所之用。1931 年，中国科学社在上海新建的图书馆落成，为纪念胡明复博士，命名为“明复图书馆”，馆中专辟一室收藏和陈列周达所赠之数学书刊，名为“美权算学图书室”。1938 年，周达 60 岁时，向中国科学社捐资，绝大部分作为美权图书室基金。次年，他又致函中国科学社，说明捐赠基金的使用办法。

周达与其他一些数学家，经过长期酝酿，于 1935 年 7 月在上海成立中国数学会并召开第一次大会。会议选举了董事会、理事会和评议会成员。周达和胡敦复、顾澄、何鲁、冯祖荀、秦汾、郑之蕃、黄际遇、王辅仁等 9 人为董事。中国数学会的会址就设在上海中国科学社明复图书馆的“美权算学图书室”内。该会决定创办两个数学刊物——《中国数学会学报》和《数学杂志》。后一种刊物以顾澄、何鲁等 13 人为编委，顾澄为主编。1937 年抗日战争爆发后，由于顾澄的亲日行为，中国数学会于 1939 年改组《数学杂志》的编委会，由胡敦复、何鲁等 9 人组成新的编委会，周达被选为新的编委。

综观周达一生的数学活动，如果说他早年在扬州是以数学学习、研究和著述为主的话，那么中年到上海以后，则以创建数学

---

① 胡炳生. 周达的家世和业绩述略. 中国科技史料，1994，15(1)：25

研究机构和学术团体的社会活动为主。“美权算学图书室”在其成立以后的20年中，一直是人们学习和研究现代数学的一个基地、进行数学学术活动的一个重要场所。周达为中国现代数学的创建和发展做出了贡献。同时，周达也是一个有成就的数学家。他的研究内容既涉及中国传统数学，又涉及西方近代数学；其使用的方法也可谓中西兼采。周达是我国现代数学的先驱。

第六节 数学刊物

在19世纪末，近代科学技术的发展与普及进展较快，科学学会、报刊杂志亦呈活跃局面。[①] 在此期间，我国先后出现了两种同名的《算学报》，这是我国最早的数学专门刊物，也是两种重要的数学刊物。[②] 第一种是黄庆澄主撰的普及性杂志，第二种是朱宪章等人创办的学术性较强的杂志。

一、黄庆澄主撰的《算学报》

黄庆澄(1863—1904)，原名炳达，字钦教，号愚初(亦作源初，晚年自号寿昌主人)。浙江平阳县蒜贤东乡黄车堡(今属苍南县陈东乡西堡村)人。他家境贫寒，为人“跌宕有奇气”；处世为学常能“独抒所见，不肯人云亦云”。[③] 他少时从同乡杨镜澄读书，并师事瑞安孙诒让、金晦等人。这些人曾创办过“瑞平化学堂”、“瑞安学计馆”、“瑞安天算社”等自然科学教育与研究机构。黄氏受他们的影响颇深。后来黄氏又受到温州著名学者陈虬、陈介石、宋平子及上海进步人士张焕纶等人的影响，学识思想由此益

① 潘君祥. 戊戌时期的我国自然科学学会. 中国科技史料，1983，4(1)：28

② 经查张静庐辑注《中国近代出版史料》初编卷二《清季重要报刊目录》一节，除两种《算学报》外，只有杜亚泉编印的《中外算报》，石印小本，每期约二十余页。

③ 见《黄庆澄硃卷》“荐批”藏温州市文物管理委员会. 编号60. 8990

④ 洪震寰.《算学报》与黄庆澄. 中国科技史料，1986，7(5)：38

进。[4]1889年，黄氏由张涣纶聘为上海梅溪书院的教习。1891年，黄氏任安徽潜山县幕僚，为安徽巡抚沈秉成所赏识。1893年由沈秉成介绍赴日本考察为时两个月。归国后，其日记整理为《东游日记》一书，由孙诒让作序印行。1897年，黄氏创办《算学报》从事算学普及工作。黄氏的著作颇多，除《算学报》外，还著有《代数指掌》、《算学启蒙》、《几何浅释》、《学算初阶》以及杂著多种。

黄氏所主撰的《算学报》创刊于光绪二十三年(1897)六月，第二年五月停刊。钱宝琮先生在《浙江畴人著述记》中说，平阳黄庆澄所编《算学报》"起丁酉六月至戊戌四月凡出十二册，介绍西法浅近数学"。黄氏创办《算学报》的目的与他提倡科学救国，教育救国的思想是分不开的。他在创刊号的"公启"中揭明宗旨说："窃惟时局艰迫，外患迭乘，海内之士始知言学。庆澄自惭驽劣，无裨于时，受竭绵力，特创兹报，冀为格致之权舆，以辟黄人之智慧。"黄氏在"公启"中还表了决心，"负山填海，讪笑不辞，惟当世大雅，有以教之幸甚。"

《算学报》为月刊，每期30～40页，约一万多字。第一、二两期为石印，第三期起改为木刻，有俞樾序文，其下题"曲园俞樾时年七十七"。除了第九期，其余各期首页第一行上方均题"算学报"三字及出版年月。各期主要内容如表4.2.6所示：

表4.2.6

期号	内容
一	论加减乘除、命分、约分、通分之理
二	总论比例
三	开方
四至十	代数论(一至七)
十一、十二	几何第十卷释义(一及二)

黄氏主撰的《算学报》是一种普及性的数学刊物，其行文通俗生动，尤其注重图解。俞樾在《算学报》第三期序中说："《算学报》月出一编，流布海内，每设一题必绘图以明之，使读者晓然于其理。"其所刊内容大部分为中国传统数学中浅显易懂的知识及西方传入的初等数学知识。如，其第一期"论加减乘除、命分、约分、通分之理"包括"命位"、"总论加减乘除之法"、"命分"、"约分"、"通分"、"总论诸分"各栏。其中"总论加减乘除之法"一栏又分"加法"、"减法"、"乘法"、"乘法歌"、"除法"各项，其中"乘法歌"就相当于现在的乘法口诀。黄氏在后注曰："右从歌诀看似极浅，其用极大，初学须熟诵之"。其中"总论诸分"一栏又分"加分"、"减分"、"乘分"、"除分"各栏。

第一期刊登的"公启"是黄氏对该刊的有关事宜的说明，兹摘录部分条款如下：

"一、本报专释近日算学中最初要切要者，演为图说，俾学者由浅而深，循序而进，即穷乡僻壤，无师无书，亦可户置一编，按其图说，自寻门径。本报实为开风气起见，区区苦心，识者鉴之。"

"一、算学一道，以图教人与以说教人，其难易相去不啻天壤。本报所重者图，故图多说少，间或标为论说，亦必格外简明，免令阅者生厌。"

"一、本报第一期论加减乘除、命分、约分、通分之理；二期论开方比例；三期论代数入门之决；四期论几何浅理；五期论几何无比例之理；六期论九章；七期以后未定，容俟续布。"

黄氏《算学报》每期最末都附有"黄庆澄曰"的一段文字，是他对上文的发挥，颇有哲理。现以第二期"总论比例"为例，包括"正比例"、"转比例"、"连比例"、"合比例"、"加减比例"各项。在该期最末有"黄庆澄曰：异哉，异哉！太空冥冥无端有物，有物斯有比，有比斯有差，有差斯有例。……断之曰：世间无物，见物非物，我不见物，惟见比例。"

黄氏若发现该期《算学报》中有错误，就另附“勘误记”在下期刊出，说明黄氏的编撰工作严肃认真。《算学报》第一期发行后“诸君纷纷函购”①，颇受欢迎。

黄氏《算学报》创刊时，报馆原设今温州市区府前街，第二期在上海新马路梅福里另设分馆，并在“时务报馆”、“格致书院”、“六先书局”、“醉六堂”等处设立销售点。②该报于光绪二十四年(1898)五月停刊。至于停刊的原因，尚不清楚。梁启超在戊戌政变后所写“《强学报》查禁后之学会学堂报馆”一文，曾列举当时被查禁的学会、学堂、报馆有43个，其中有《算学报》。据《平阳县志·人物志·黄庆澄传》说，《算学报》“出版甫十二册，以戊戌政变罢”。但《算学报》只在“公启”与“告白”等栏中对政治略有论及，但也无碍于时政，且它在五月就已停刊，而政变发生在农历八月下旬，看来它不像是因政变而被查禁。这里只能存疑。

黄庆澄主撰的《算学报》在当时是具有一定影响的数学杂志，它对于数学知识在大众中的普及起到一定的推动作用。

二、朱宪章等人创办的《算学报》

由朱宪章、严杏林、朱成章、严槐林四人共同创办的《算学报》从光绪二十五年(1899)八月开始出版，月刊，每月十五日出版，前后共出三期。③

朱成章、朱宪章兄弟为广东番禺人，严杏林、严槐林兄弟为浙江桐乡人。朱氏昆仲与严氏昆仲都是广东番禹徐绍桢的学生。徐绍桢，字固卿，精于算学，著有《勾股通义》三卷(1888年)，《学

---

① 黄庆澄．本馆告白．见：算学报．第2期

② 黄庆澄．算学报．第2期

③ 钱宝琮先生在《浙江畴人著述记》一文中说朱宪章等人创办的《算学报》“仅出二期”有误。

一斋勾股代数草》二卷，《学一斋算课草》四卷(1897)年，《学一斋算学问答》一卷，《算学入门》二卷(1906年)等书。[①] 徐绍桢不但精于数学研究，而且在教学中善于启发学生。这使得严氏和章氏昆仲对数学感受颇深。他们认为“今之算学胜于古昔不啻千百”，如加以研究推广，以后的数学必将“远胜于今日”。他们还认为“今之算学诚为超越前代，然天元、四元以及几何、代数、微积各学或创、或因、或由翻译而得，其间不无参错，亦有言而未尽及尽而未明者。”[②]因此朱氏与严氏昆仲一起筹办《算学报》。

朱氏等人创办的《算学报》与黄庆澄《算学报》目标不同，它不是以普及数学为目标，而是“以阐明新理，纠正谬误为宗”，且明确规定“其有浅近易知及陈腐无谓者，本报概不登录”。[③]《算学报》三期共刊出38篇文章，第一期14篇，后两期各12篇。这些文章大多为朱、严四人“平日读书所得者”。该刊内容有两大类，一为“论算”，“凡阐明古义及纠正前人之失、补苴算法之阙者附焉”；另一类为“演算”，“凡设题演草及创立新法者附焉”。[④]

《算学报》第一期共有四十四页，前有朱宪章所写的“算学报缘起”一篇及严杏林、槐林昆仲所写的叙文各一篇；第二期共三十三页，前有“算学报略例”一篇；第三期共三十一页。各期目录列于下表。

---

① 李俨，钱宝琮. 李俨、钱宝琮科学史全集. 沈阳：辽宁教育出版社，1998. 580
② 严杏林. 算学报叙. 见：算学报. 第1期
③ 朱宪章等. 算学报略例. 见：算学报. 第2期
④ 朱宪章等. 算学报略例. 见：算学报. 第2期

表 4.2.7

期号	目录	作者
一	测圆海镜九容式解	朱宪章
	割圆八线互求解	严槐林
	小数方根必大于方积论	严槐林
	海宁李氏线面体循环说辨误	严杏林
	江阴宋氏之分还原草辨［并邹氏图说］	严杏林
	同文馆课艺辨误	严槐林
	代数术一百八十二款辨误	严杏林
	沅湘通艺录蒋氏算术辨误	朱成章
	古九章两鼠穿垣题简术	朱成章
	弧田问率考真四题	严槐林
	解代数式二题	严杏林
	学一斋算课草三题	严槐林
	解求志书院已亥夏季课题一则	严杏林
二	椭圆自二心与切线正交二线相乘等于短轴半方解	朱宪章
	诸尖锥辨	严杏林
	椭圆任一心距短轴端必为半长轴解	严槐林
	浑仪两大圈相交相割不相切证	严杏林
	抛物线诸线相等解	严槐林
	求上下不等圆面体新术	严杏林
	椭圆任一点作切纵二线与引长长轴交所交轴之半必为二交点距中点连线比例中率解	朱宪章

续表 4.2.7

期号	目录	作者
	诸堆垛皆为递加比例释	严槐林
	任知中垂线容圆径容方边三事之二求勾股弦简术	朱成章
	同文馆课艺简式	朱宪章
	解代数式三则	朱成章
	根指数配隅开方新术	严槐林
三	两平圆相交相切不同心解	严槐林
	三角内求作容方图说	严杏林
	圈除圈等于任何数解	朱宪章
	圆内作六边切形之一即为半径解	严槐林
	强自力斋辨误	朱宪章
	算学奇题一等于二辨误	严槐林
	释勾股及等边三角形上所作各他形相等之理	朱成章
	代数难题简述	严杏林
	同文馆课艺辨误	朱宪章
	学一斋算课题二则	严杏林
	证同文馆课艺题九则	朱成章
	代数难题辨误	朱宪章

从这三期的内容来看，多是纠正前人之失，有价值的创新不多。现以第三期朱宪章所撰《同文馆课艺辨误》为例，兹摘录部分原文如下：

“《同文馆课艺》卷四，有勾股和有中垂线求勾股弦一题，原术求勾股弦各一式，消化未善故皆开三乘方，然后得数。其求弦

一式则移项有甚误之处，不可不辨。今录而门正之，并另演一式，以开两次平方，得数尽。开方、廉具备之三乘方，其商数甚不易得。不如开两次平方，为有把握，且消化亦较易而简也。明算者当能参观而辨之。”

这是朱氏对《同文馆算学课艺》卷四中贵荣所作一题提出的合理建议，并指出贵氏题中的错误。最后朱氏“另演一式”附于后。其内容这里不再赘述。

朱氏等人创办的《算学报》总部设在桂林后库街朱维新堂，从第二期起，在国内一些城市设立了十个代派处，分别是：桂林左营街徐通介堂；桂林后贡门周惠远堂；桂林盐道街小井边胡澹远堂；桂林美仁里杨公馆；梧州府塘基街招公馆；浔州桂平县置内徐亮夫；广东太平街外十七甫敬仁堂内刘小芸；上海小南门外里仓桥王宅内王绪甫；上海西门内关帝庙前姚宅；湖南新化县北渡村场大夫第。[1]

朱氏昆仲与严氏昆仲创办的《算学报》虽然创新的成果不多，但它为我们了解清末知识界努力发展中国数学事业的情况提供了有价值的资料，且为数学史工作者研究清末数学教育及数学传播的情况提供了宝贵的线索，如《解求志书院已亥夏季课题一则》、《同文馆课艺简式》、《学一斋课题二则》、《证同文馆课艺题九则》等。

朱氏等人创办的《算学报》后被收入《学寿堂丛书》。据光绪二十七年(1901)，日本横滨出版的《清议报》合编本，记当时与该报交换的报刊名录中有《算学报》，[2]这至少说明黄氏与朱氏等人创办的两种《算学报》中的一种已流传到国外。

---

① 郭世荣．清末朱宪章等人创办的《算学报》．中国科技史料，1991，12(2)：89

② 张静庐辑注．中国近代出版史料初编．北京：中华书局，1957．88

三、其他

在19世纪后期，也有一些科技期刊刊登数学文章，但它们不属于专门的数学刊物。如美国传教士丁韪良和英国传教士艾约瑟等人主持的《中西闻见录》(The Peking Magazine)。清末著名数学家李善兰在第2、3、4号上连载的《考数根法》是我国有关素数论的最早著述。由英国人傅兰雅主编的《格致汇编》曾设有“算学奇题”专栏，专门刊登疑难数学问题。其他报刊如《格致新报》、《湘学报》、《新学报》等也登载数学文章。

第七节　算学丛书[①]的编纂

鸦片战争以后，外国教会、封建官僚及具有资产阶级民主思想的知识分子都想宣传各自的政治主张，出版书刊则是他们的一种主要方式。同时，广大人民学习新知识和掌握科学技术的需要也与日俱增。这样，原有的雕版印刷术及延续千年的官、私、坊刻书已不能适应形势的需要，于是出现了一些新的出版印刷机构。其中包括外国教会的书馆、洋务派的译书馆和官书局以及一些私人经营的出版机构。清代末期，随着石印技术的传入，我国的印刷呈现出雕版、活字和石印三种方式并用的情形。雕版印刷、活字印刷我国早已有之，通都大邑，无不刻书。至于传入的石印，首先出现在上海，点石斋、同文书局和拜石山房三家鼎足而立，名噪一时。在他们的带动下，石印技术逐渐传播到各地。从清末开始，全国各地采用石印技术者有上海文明书局、元和胡氏、武进陶氏、上海文瑞楼、上海扫叶山房、沔阳卢靖、上海鸿文书局、上海鸿宝斋、上海积山书局、北京官报局、保定官书局、番禺沈氏、

① 本节讨论的“丛书”系指将不同作者撰写的多种著作汇集到一起而编成的一套书，而非一人所撰多部作品结成的集子。

上海书局、上海中西书局等百余家。虽然石印分布在二十多个省市，但绝大多数集中在上海，上海是我国石印的中心。石印的经营者官方、私人都有，比较而言，私人经营石印最多，印的书也是最多。[①]在众多的石印本中，有不少的数学著作，而其中还有几种大型的数学丛书，它们在数学知识的传播上发挥了重要作用。

下面以出版年代为序，将这几种数学丛书及其子目列出。

一．中西算学丛书初编

四明求敏斋主人邵蕙沅编，清光绪二十二年(1896)上海鸿宝斋石印本

子目

新仪象法要三卷　(宋)苏颂撰

同文算指前编二卷　(明西洋)利玛窦授　(明)李之藻述

同文算指通编八卷　(明西洋)利玛窦授　(明)李之藻述

浑盖通宪图说二卷　(明)李之藻撰

圜容较义一卷　(明西洋)利玛窦授　(明)李之藻译

勾股义一卷　(明)徐光启撰

测量法义一卷　(明西洋)利玛窦口译　(明)徐光启笔授

测量异同一卷　(明)徐光启撰

简平仪说一卷　(明西洋)熊三拔撰

五星行度解一卷　(清)王锡阐撰

晓庵新法六卷　(清)王锡阐撰

数学八卷续一卷　(清)江永撰

　历学补论一卷

　岁实消长辨一卷

　恒气注历辨一卷

① 曹之．中国古籍版本学．武汉：武汉大学出版社，1993．394～396

冬至权度一卷
七政衍一卷
金水发微一卷
中西合法拟草一卷
算剩一卷
正弧三角疏义一卷
推步法解五卷　(清)江永撰
邹征君遗书　(清)邹伯奇撰
学计一得二卷
补小尔雅释度量衡一卷
格术补一卷
对数尺记一卷
乘方捷术三卷
邹征君存稿一卷
赤道恒星图一卷
夏氏算学　(清)夏鸾翔撰
少广缒凿一卷
洞方术图解二卷
致曲术一卷
致曲图解一卷
徐氏算学三种　(清)徐有壬撰
造各表简法一卷
截球解义一卷
椭圆求周术一卷
里堂学算记　(清)焦循撰
加减乘除释八卷
天元一释二卷
释弧三卷

　　释轮二卷
　　释椭一卷
三统术详说四卷　(清)陈澧撰
弧三角平视法一卷　(清)陈澧撰
对数简法二卷　(清)戴煦撰
续对数简法一卷　(清)戴煦撰
代数勾股术四卷　(清)张茂涀撰

二. 测海山房中西算学丛刻初编

测海山房主人辑，清光绪二十二年(1896)上海巩衡堂石印本
子目
算学启蒙三卷　(元)朱世杰撰
笔算便览五卷　(清)纪大奎撰
算法须知一卷　(清)华蘅芳撰
增删算法统宗十一卷　(明)程大位撰　(清)梅瑴成增删
学算笔谈十二卷　(清)华蘅芳撰
数学理九卷附一卷　(英)棣么甘撰　(英)傅兰雅口译　(清)赵元益笔授
算式集要四卷　(英)哈里司撰　(英)傅兰雅口译　(清)江衡笔述
开方表一卷　(清)贾步纬撰
勾股六术一卷　(清)项名达撰
行素轩算学四种　(清)华蘅芳撰
　　开方别术一卷
　　数根术解一卷
　　开方古义二卷
　　积较术三卷
三角数理十二卷　(英)海麻士撰　(英)傅兰雅口译　(清)华

衡芳笔述

中西度量权衡表一卷　(清)沈敦和撰

天元一释二卷　(清)焦循撰

弧角拾遗一卷　(清)贾步纬撰

谢穀堂算学三种　(清)谢家禾撰

衍元要义一卷

弧田问率一卷

直积回求一卷

董方立遗书五种　(清)董祐诚撰

割圆连比例术图解三卷

椭圆求周术一卷

斜弧三边求角补术一卷

堆垛求积术一卷

三统术衍补一卷

九数外录一卷　(清)顾观光撰

代数术二十五卷首一卷　(英)华里司撰　(英)傅兰雅口译　(清)华蘅芳笔述

代数难题解法十六卷　(英)伦德撰　(英)傅兰雅口译　(清)华蘅芳笔述

微积溯源八卷　(英)华里司撰　(英)傅兰雅口译　(清)华蘅芳笔述

四元玉鉴细草三卷卷首一卷卷末二卷　(清)罗士琳补草

四元释例一卷　(清)易之瀚撰

谈天十八卷首一卷附表一卷　(英)侯失勒撰　(英)伟烈亚力口译　(清)李善兰笔述　(清)徐建寅续述

躔离引蒙三卷　(清)贾步纬撰

畴人传四十六卷　(清)阮元编

续畴人传六卷　(清)罗士琳编

畴人传三编七卷 (清)诸可宝编

三. 古今算学丛书

清刘铎辑，清光绪二十四年(1898)上海算学书局石印本

子目

周髀算经二卷附音义 (汉)赵君卿注 (周)甄鸾述 (唐)李淳风释 (宋)李籍音义

周髀算经图解一卷 (明)朱载堉撰

周髀矩数图注 周髀用矩述一卷 (清)程瑶田撰

周髀算经述一卷 (清)冯经撰

周髀算经校勘记 (清)顾观光撰

周髀算经考证一卷 (清)邹伯奇撰

几何原本六卷 (明)徐光启 (意)利玛窦同译

几何原本后九卷 (清)李善兰 (英)伟烈亚力同译

几何原本六和六较线解一卷 (清)顾观光撰

形学备旨十卷 (清)邹立文 (美)狄考文同译

形学补编一卷 (清)叶耀元撰

形学演八卷 (清)王泽沛撰

勾股六术图解一卷 (清)项名达撰

勾股术附造无零勾股表捷法一卷 (清)吴嘉善，附卷沈善蒸撰

平三角术一卷 (清)吴嘉善撰

三角须知一卷 (英)傅兰雅撰

割圆密率捷法四卷 (清)明安图撰

割圆连比例术图解三卷 (清)董祐诚撰

缀术释明二卷 (清)左潜撰

割圆阐率一卷 (清)刘彝程撰

象数一原六卷 (清)项名达撰

外切密率四卷　(清)戴煦撰
缀术释戴一卷　(清)左潜撰
割圆八线缀术　(清)徐有壬撰
圆率考真图解一卷　(清)曾纪鸿等撰
弧矢启秘图解二卷　(清)李善兰撰，席淦图解
弧角条目一卷　(清)汪莱撰
弧三角举隅一卷　(清)江临泰撰
椭圆求周术一卷图解一卷　(清)项名达撰，戴煦补图解
致曲术一卷图解一卷　(清)夏鸾翔撰
万象一原九卷　(清)夏鸾翔撰
圆锥曲线说三卷　(清)李善兰　(英)艾约瑟同译
孙子算经三卷　(北周)甄鸾注　(唐)李淳风释
数术记遗一卷　(汉)徐岳撰
夏侯阳算经三卷　(隋)韩延撰
数学启蒙二卷　(英)伟烈亚力撰
同度记一卷　(清)孔继涵撰
中西度量权衡表一卷　不著撰人名氏
张丘建算经三卷　(北周)甄鸾注　(唐)李淳风释
答数界限一卷　(清)华世芳撰
求一术通解附捷术二卷　(清)黄宗宪撰，附卷龚杰撰
分法一卷　(清)吴嘉善撰
少广正负术内篇三卷　(清)孔广森撰
开方说三卷　(清)李锐撰
开诸乘方捷术一卷　(清)项名达撰
乘方捷术三卷　(清)邹伯奇撰
开方之分还原术一卷　(清)宋景昌撰
开方余义附开带纵立方法一卷　(清)顾观光撰
开方古义二卷　(清)华蘅芳撰

面体比例便览一卷 (清)年希尧撰
面体互容比例一卷 (清)席淦撰
递兼数理一卷 (清)汪莱撰
垛积比类四卷 (清)李善兰撰
垛积演较一卷 (清)华蘅芳撰
垛积一得一卷 (清)崔朝庆撰
假数测圆二卷 (清)戴煦撰
对数简法二卷 续对数简法一卷 (清)戴煦撰
造各表简法一卷 (清)徐有壬撰
对数详解五卷 (清)丁取忠、曾纪鸿撰
对数探源二卷 (清)李善兰撰
对数衍一卷 (清)顾观光撰
测圆海镜细草十二卷 (清)李锐细草
测圆海镜图表附九容公式一卷 (清)李善兰撰，附卷王季同撰
测圆海镜图解二卷 (清)叶耀元撰
测圆海镜细草通释十二卷 (清)王泽沛撰
益古演段三卷 (元)李治撰
算学启蒙述义三卷 (清)王鉴撰
衍元要义一卷 (清)谢家禾撰
天元一草一卷 方程天元合释一卷 (清)吴嘉善撰
算法天生法指南五卷 (日)会田安明撰
四元玉鉴细草二十四卷 (清)罗士琳细草
四元释例一卷 演元九式一卷 (清)罗士琳撰
四元名式释例一卷 (清)吴嘉善撰
四元解二卷 (清)李善兰撰
代数术二十五卷 (清)华蘅芳、傅兰雅同译
算式集要四卷 (清)江衡、傅兰雅同译

泛倍数衍一卷　(清)王季同撰

代数备旨六卷　(清)邹立文、生福维同译

代微积拾级十八卷　(清)李善兰　(英)伟烈亚力同译

西算新法直解八卷　(清)冯桂芬、陈旸同撰

九数存古九卷　(清)顾观光撰

缉古算经细草三卷　(清)张敦仁撰

缉古算经图解三卷音义一卷　(清)陈杰撰

数书九章十八卷附札记四卷　(宋)秦九韶撰，附卷(清)宋景昌撰

数学钥六卷　(清)杜知耕撰

粟布演草二卷补一卷　(清)丁取忠等撰

古筹算考释六卷　(清)劳乃宣撰

珠算一卷　(清)方中通撰

比例规解一卷　(明)徐光启撰

对数尺记一卷　(清)邹伯奇撰

尺算征用一卷　不著撰人名氏

器象显真四卷附图一卷　(清)徐建寅、傅兰雅同译

算器图说附简算新法一卷　(清)傅兰雅撰，附卷(清)叶耀元撰

八线表二卷

对数表四卷

弦切对数表一卷

古今算学书录七卷附录一卷　(清)刘铎辑

除了上面三种较大型的数学丛书外，还有光绪二十八年(1902)成都算学书局刊行的由徐树勋编辑的《算学丛书》，收清代数学著、译共十七种，它们是

务民义斋算学九种十六卷

董方立算书五种七卷
夏紫笙算书五种十五卷
代数术二十五卷
代数须知一卷
改正形学(备旨)十卷、圆锥曲线合刊十三卷
形学习题解证八卷
勾股六术图解三卷附勾股表并弧角拾遗
三角和较术一卷
弧三角举隅一卷(江临泰撰)
平三角举要五卷
古筹算考释六卷
比例汇通四卷
梅氏增删算法统宗十一卷
算学须知一卷
算雅一卷(李固松撰)
画器须知一卷

在清末出版的一些科技丛书中，也或多或少地收有数学著、译。如由求志斋主人所辑，于光绪二十三年(1897)上海鸿文书局石印本的《中西新学大全》中收有数学著作若干种；由(清)王西青、卢梯青辑，光绪二十一年(1895)上海醉六堂石印本的《西学大成》“子编”中收数学著作十种；由(清)孙家鼐编，光绪二十三年(1897)上海飞鸿阁书林石印本的《续西学大成》收数学著作五种。

清代后期研究论著分类文献

（每类按写作、发表年代先后为序）

专　著

一、通史性数学著作

1 李俨．中国数学大纲(下册)．北京：科学出版社，1958

2 李俨、杜石然．中国古代数学简史(下)．北京：中华书局，1964．本书的英文译本是：Translated by Clossley. J. N & Lun. A. W. 译名为 Chinese Mathematies. A Concise History. Oxford：Clarendon Press，1987

3 钱宝琮(主编)．中国数学史．北京：科学出版社，1964，1981，1992

4 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984

5 沈康身．中算导论．上海：上海教育出版社，1986

6 中外数学简史编写组．中国数学简史．济南：山东教育出版社，1986

7 Martzloff，J. -C.，Histoire Des Mathematiques Chinoises. Paris，Milan，Barcelone，Mexico，1988．此书有英国 Stephen S. Wilson 的英文译本，书名为 A History of Chinese Mathematics，Springer，1997

8 刘钝．大哉言数．沈阳：辽宁教育出版社，1993，1995

9 李兆华．中国数学史．台北：文津出版社，1995

10 李信明. 中国数学五千年. 台北：台湾书店，1998

11 李迪(主编). 中国传统数学文献精选导读. 武汉：湖北教育出版社，1999

二、专题研究

12 Bennett, Adrian A. John Fryer: The Introduetion of Western Science and Technology into Ninteenth-Century China. Cambridge Mass: Havard University Press, 1967

13 Peter, B., American Science and Modern China 1876—1936. New York: Cambridge University Press, 1980

14 Swetz, F. Mathematics Education in China: Its Growth and Development. Cambridge Mass: The MIT Press, 1974

15 李兆华. 衡斋算学校证. 西安：陕西科学技术出版社，1998

三、期刊及文集

(一) **期刊**

16 自然科学史研究，中国科学院自然科学史研究所，中国科学技术史学会

17 中国科技史料，中国科学技术史学会

18 数学史研究，日本数学史学会

19 Chinese Science, The International Society for the History of East Asian Science, Technology, and Medicine.

20 科学史通讯，台湾科学史学会

21 Philosophy and the History of Science, (台湾)远流出版公司 (Yuan-Liou Publishing Co. Ltd).

(二) **连续性论文集**

22 中国数学史论文集(一)～(四). 山东教育出版社

23 数学史研究论文集(一)～(六). 内蒙古大学出版社，九章出版社

24 中日近现代数学教育史，第一卷至第三卷. (日)ハンカイ出

版印刷株式会社

（三）**其他论文集**

25 李俨．中算史论丛，第一集至第五集．科学出版社

26 李俨，钱宝琮．李俨、钱宝琮科学史全集．沈阳：辽宁教育出版社，1998

27 山田庆儿，田中淡(编)．《中国科学史国际会议：1987 京都シンポジウム》报告书．京都：京都大学人文科学研究所出版，1992

28 梅荣照(主编)．明清数学史论文集．南京：江苏教育出版社，1990

29 洪万生(主编)．谈天三友．台北：明文书局，1993

30 李迪．中国科学技术史论文集(一)．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991

31 李兆华．古算今论．天津：天津科学技术出版社，2000

论文及文章

一、一般性和通论性论文

（一）一般性论文

32 Swetz, Fran J. The Introduction of Mathematies in Higher Education in China, 1865—1887. History Mathematica, 1974 (1). 167～179

33 郭金彬．清代八闽数学略论．自然辩证法通讯，1984，6(2)：62～66

34 吴裕宾．清代扬州学者的数学研究．自然辩证法通讯，1988 (2)：51～60

35 川原秀城．清朝中期の學と歷算の學，中国古代科学史论续篇．日本京都大学人文科学研究所，1991．209～241

36 黄荣肃. 清代满族数学史概述. 北方文物，1991(1)：71～75

37 张瑞山. 乾嘉学派与清代天算、地学、医学. 自然辩证法通讯，1992(5)：57～63

38 金福. 京师同文馆开设天文算学始末. 自然辩证法通讯，1992(6)：62～66

39 杨忠泰，冶智英. 中国现代数学的肇始——19世纪末20世纪初中国数学发展的历史考察. 宝鸡文理学院学报，1993(2)：128～133

40 薛迪群. 明清时期上海的数学发展. 科学技术与辩证法，1995，12(3)：39～43

41 Luo Jian Jin. Several Counting Results in the 18th-19th Century in Chinese Mathematies. Combinatorics and Graph Theory'95 Vol. 1 Singapore：World Scientific，1995，278～283

42 郭世荣. 清末数学家的微积分水平. 见：第二届中国少数民族科技史国际会议论文集. 北京：社会科学文献出版社，1996. 139～142

43 田淼. 清末数学教育对中国数学家职业化的影响. 自然科学史研究，1998，17(2)：119～128

44 特古斯，郭世荣. 晚清割圆术的饱和倾向. 自然科学史研究. 1988，17(4)：348～354

45 李迪，冯立升. 清代数学家使用笔算略论，西北大学学报(自然科学版)，1998，28(6)：461～466

46 李迪. 清末的书院与"算学课艺". 中日近现代数学教育史，第三卷. 1999. 146～153

（二）数学内容专题研究论文

47 周明群. 李邹顾戴徐诸家对于对数之贡献. 清华学报，1926，3(2)：1047～1068

48 严敦杰. 中算家的素数论. 数学通报，1954(4)：6～10，1954(5)：12～15
49 何绍庚. 椭圆求周术释义. 科学史集刊，1984，11：130～142
50 李国伟. 论保其寿的浑圆图. 第一届科学史研讨会汇刊，台北，1986，67～79
51 Ko-Wei Lih 李国伟. Bao Qi-Shou 保其寿 and His Polyhedral Hun Yuan Tu. In：Science and Technology in Chinese Civilization. Singapore：World Scientific，1987，93～108
52 罗见今. 徐、李、华、夏诸家的计数函数. 见：第三届国际中国科学史讨论会论文集. 北京：科学出版社，1990. 45～51
53 李国伟. 十九世纪中国组合数学的某些贡献(摘要). 科学史通讯(台湾)，1985，第四期：32
54 李继闵. 再评清代学者的调日法工作研究，自然科学史研究，7(4)：335～345
55 王翼勋. 清代学者对“大衍总数术”的探讨. 明清数学史论文集. 1990. 317～333
56 冯立升. 清代对球及其部分的体积和表面积问题的研究. 数学史研究文集，第二辑. 1991. 113～122
57 王荣彬，郭世荣. 戴煦、项名达、夏鸾翔对迭代法的研究. 自然科学史研究，1992，11(3)：209～216
58 郭世荣. 程、梅、戴、汪诸家的数学和天文工作 1986年以来的研究综评. 安徽师大学报(自然科学报)，1993，科技史研究专辑：16～22
59 特古斯. 清代中算家的递加数. 自然科学史研究，1995，14(4)：337～348
60 特古斯. 试论清代割圆连比例方法. 自然科学史研究，15(4)：219～225

61 特古斯. 晚清算家对递加数性质的认识. 内蒙古师大学报(自然科学报), 1997(2): 62～68

（三）**数学期刊与数学社团论文**

62 洪震寰.《算学报》与黄庆澄. 中国科技史料, 1986, 7(5): 36～37
63 洪震寰. 清末的"瑞安学计馆"与"瑞安天算学社". 中国科技史料, 1988, 9(1): 80～87
64 郭世荣. 清末朱宪章等人创办的《算学报》. 中国科技史料, 1991, 12(2): 88～90
65 余郁. 清末时期的两个算学社. 中学数学教学参考, 1994(4): 47～48

（四）**中外交流与比较**

66 藤家邻著, 恕斋译. 朝鲜金秋史入燕与阮翁面京师. 新民月刊, 1936, 2(2)
67 严敦杰. 阿拉伯数码字传到中国来的历史. 数学通报, 1957(10): 1～4
68 严敦杰. 早期传入中国的欧拉学说. 科学史集刊, 1958, 1: 20～28
69 梅荣照. 我国第一本微积分学译本出版一百周年. 数学通报, 1959(9): 34
70 梅荣照. 我国第一本微积分学的译本——《代微积拾级》出版一百周年. 科学史集刊, 1960, 3: 59～64
71 杰. 我国第一本概率论的著作. 数学通报, 1960(5): 42
72 陈玉堂, 一部用古文翻译的数学专著——《代微积拾级》. 羊城晚报, 1980-09-03
73 胡作玄. 近代数学的引进与发展: 比较研究, 科学传统与文化. 西安: 陕西科学技术出版社, 1983. 279～288
74 李迪. 牛顿学说在中国. 内蒙古师大学报(自然科学版), 1983

(1)：74～83

75 李迪. 高斯学说传入中国的经过. 内蒙古师大学报(自然科学版),1984(1)：56～63

76 田千兴. 我国翻译欧几里得几何史略. 怀化师专学报(自然科学版)，1984(1)：53～56

77 沈康身. 关孝和与李善兰的自然数幂和公式. 中国数学史论文集(三). 1987. 10～27

78 郭世荣. 西方传入我国的第一部概率论专著——《决疑数学》. 中国科技史料，1989，10(2)：90～96

79 严敦杰. 跋《决疑数学》十卷. 明清数学史论文集. 421～444

80 韩琦. 中越历史上天文学与数学的交流. 中国科技史料,1991,12(2)：3～8

81 李迪. 西方近现代数学传入中国之经过. 中国科学技术史论文集(一). 234～254

82 李迪. 第一部中译本四元数著作——《四原原理》. 中国科学技术史论文集(一). 276～284

83 张奠宙.《代微积拾级》的原书和原作者. 中国科技史料,1992,13(2)：86～90

84 那日苏. 中日两国兴办近代教育初期比较及当时的数学教育. Proceedings of the Cultural History of Mathematics，Vol. 4，1994，16～19

85 李迪. 17～19世纪中德数学关系史. 内蒙古数学会第五届年会论文集及会志. 内蒙古大学出版社，1995. 5～13

86 Li Di. On the Transmision of the Hand-Operated Drum Calculator in China in the 19th Century. Proceedings of the Cultural History of Mathematiess. Vol. 6，1996，26～31

87 徐泽林. 试论中日“缀术”之异同. 西北大学学报(自然科学版)，1997，27(4)：277～282

88 汪晓勤. 伟烈亚力对中国数学的评价. 中国科技史料，1998，19(2)：10～23

89 韩琦. 传教士伟烈亚力在华的科学活动. 自然辩证法通讯，1998(2)：57～70

90 查永平. 中西数学符号之比较与不同结局. 科学技术与辩证法，1998(6)：39～43

二、数学家传记及其工作论文

（一）合传及传主的工作（不包括"谈天三友"）

91 赤松. 道咸以来畴人合赞. 国粹学报，总 27 号，1907，6～7

92 李俨. 清代算家姓名录. 学艺，1937，12(2)：67～78

93 严敦杰. 蜀中畴人传. 真理杂志，1944，1(1)：97～105

94 李承祥. 续蜀中畴人传. 新蜀报(渝版)，1945-10-21 "蜀雅" 20 期，1945-10-28 "蜀雅" 21 期

95 郭宁芳. 清代部分数学家的成才考察. 自然辩证法通讯，1984，6(5)：45～48

96 罗见今. 中国近代数学和数学教育的先驱者——李善兰、华蘅芳. 辽宁师大学报(自然科学版)，1986(4):5～12

97 刘钝. 李锐、顾观光调日法工作评述. 自然科学史研究，1987，6(2):147～156

98 王翼勋. 秦九韶、时曰醇、黄宗宪的求定数方法. 自然科学史研究，1987，6(4)：308～313

（二）刘衡、王贞仪、戴震、李潢和张敦仁

[刘衡、王贞仪]

99 金福. 刘衡勾股测量术评介. 沈阳师范学院学报(自然科学版)，1992(1)：87～93

100 金福. 刘衡等表开方术研究. 数学史研究文集，第六辑. 1998. 65～69

101 戚志芬. 清代女算家王贞仪. 光明日报，1960-03-09；中国

妇女，1960-07-01

102 管成学. 客居吉林的清代女科学家——王贞仪. 社会科学战线，1988(1)：211～214

103 李敏. 清代女科学家王贞仪. 中国科技史料，1997，18(2)：17～27

[戴震]

104 刘光汉. 戴震传. 国粹学报，1906

105 梁启超. 戴东原先生传. 晨报副镌，1924-01-19

106 梁启超. 东原著述纂校书目考. 同上，1924-01-20

107 魏建功. 戴东原年谱. 国学季刊(北大)，1925，2(1)：125～153

108 张海鹏. 戴震. 合肥师范学院学报，1960(1)：73～77

109 薮内清. 戴震の历算学，明清时代の科学技术史. 京都：京都大学人文科学研究所，1970

110 朱泽. 安徽古代历史人物戴震. 安徽日报，1980-07-18

111 郭书春. 评戴震对《九章算术》的整理. 明清数学史论文集. 1990. 261～294

112 川原秀成. 戴震と西洋历算学. 中国思想史研究，12 号，1990，1～35

113 道胁义正，小林龙彦，城地茂. 戴震的公式. 戴学新探(南京大学学报(哲社版)专辑)，1991，241～259

114 王辉. 戴震"方程"旧术校案浅析. 跨世纪科学文集. 西安：陕西科学技术出版社，1996. 73～76

115 陈展云. 策算浅释. 晨报六周年纪念特刊，1924(12)：217～222

[屈曾发、李潢等]

116 席振伟. 《九章通考》及其著者. 中国科技史料，1993，14(4)：19～22

117 刘兴祥. 对李潢出生年代的考证. 中国科技史料，1994，15(3)：93～95

118 刘兴祥. 李潢生平与著述. 延安大学学报(自然科学版)，1995，14(2)：58～

119 刘兴祥. 李潢的治学方法、思想和态度. 延安大学学报(自然科学版)，1996，15(3)：42～44

120 张秀琴. 数学家张敦仁传略. 中国科技史料，1996，17(4)：33～38

121 郭书春. 评宋景昌对《详解九章算法》的校勘. 自然科学史研究，1994，13(3)：193～200

（三）博启、罗士琳、阮元及《畴人传》

［博启、罗士琳］

122 那日苏. 博启对勾股形内容三事和较的研究. 内蒙古师大学报(自然科学版)，1986(2)：43～48

123 那日苏. 对博启《勾股内容三事和较》的研究. 中国少数民族科技史研究，第一辑. 1987. 43～51

124 那日苏. 博启的逻辑推理方法. 中国数学史论文集(四). 1996. 133～141

125 李兆华.《清史稿》博启传校勘. 见：第二届中国少数民族科技史国际会议论文集，北京：社会科学文献出版社，1996，123～126

126 郭世荣. 罗士琳的著述活动及其数学思想. 内蒙古师大学报(自然科学版)，1986(2)：28～34

127 郭世荣. 罗士琳《三角科较算例》简介. 中国数学史论文集(三). 1987. 113～122

128 朱家生，吴裕宾. 罗士琳数学研究述评. 扬州师范学院学报(自然科学报)，1991(2)：26～32

[阮元与《畴人传》]

129 朱家生，邱兆璋，吴裕宾．试论阮元的科学史观．扬州师院学报(自然科学版)，1987，7(4)：42～50

130 Van Hée(赫师慎)．The Cheou Jen Chuan of Yuan Yuan，Isis．1926(8)：103～118

131 三上义夫．畴人传论—评 Van Heé 氏所说．东洋学报，1927，16(2)：185～222，1927，16(3)：287～333

132 Y. Mikami. The Chou-Jen Chaun of Yuan Yuan(A critique of Van Hee artile[1926])，Isis．1929(11)：124～125

133 李俨．"畴人传"的介绍．图书简介，1955(8、9)：12～13

134 吴裕宾．我国第一部科学家传记—《畴人传》．1980(3)：44

135 王萍．阮元与畴人传．科学史通讯(台湾)，第一期，1982，8～9；中央研究院近代史研究所集刊，第四期下册，605～607

136 黄汉平．阮元主编《畴人传》．科技日报，1990-05-11，第4版

137 傅祚华．《畴人传》研究．明清数学史论文集．216～261

138 洪万生，欧秀娟．诸可宝与《畴人传三编》．见：科史薪传．沈阳：辽宁教育出版社，1997，165～178

(四)"谈天三友"

[三友间的关系]

139 郭世荣．清代中期数学家焦循与李锐之间的几封信．数学史研究文集，第一辑，1990，123～130；谈天三友，125～140

140 吴裕宾．汪莱、李锐龂龁辨．中国科技史料，1990，11(3)：3～10；谈天三友，37～42

141 洪万生．焦循给李锐的一封信．科学月刊，1991，22(11)：855～859；谈天三友，140～148

142 洪万生，刘钝．汪莱、李锐与乾嘉学派．汉学研究，1992，

10(2)：85～103；谈天三友，9～36

143 Horng，Wann-Shen，Chinese Mathematics at the Turn of the 19th Century：Jiao Xun，Wang Lai and Li Rui. Philosophy and Conceptual History of Science in Taiwan，The Netherlands：Kluwer Academic Publishers，1992，167～208

144 吴裕宾，朱家声. 焦循、汪莱、李锐数学研究述评. 扬州师院学报(自然科学版)，1993，13(3)：31～39

145 郑坚坚. 关于焦循致李锐的两封信. 安徽师大学报(自然科学版)，科技史研究专辑，1993，77～80

146 吴裕宾. "谈天三友"的学风、交往与友情. 同上，81～85

147 吴裕宾. "谈天三友"宜为哪仨？谈天三友，1～8

148 洪万生. 谈天三友焦循、汪莱和李锐—清代经学与算学关系试论. 同上，43～124

[焦循]

149 白昭. 博大精深的学者焦里堂. 清华周刊，309 期，1924，10～17

150 王永祥. 戴东原的继承者焦里堂. 东北丛镌，1930，1(12)：1～24

151 王永祥. 焦里堂年谱. 东北丛镌，1931，1(13)：1～66

152 沈眉英. 焦里堂思想的评述. 江苏研究，1935，1(5)：1～4

153 吴裕宾. 试论焦循的数学思想. 辽宁师范大学学报(自然科学版)，1984(4)：35～42

154 吴裕宾. 焦循与《加减乘除释》. 自然科学史研究，1986，5(2)：120～128

155 邱兆璋. 试论焦循的数学研究方法. 南京师大学报(自然科学版)，1987(2)：25～28

156 李亚宁. 焦循的数理哲学思想述评. 百科知识，1987(4)：15

～18

[汪莱]

157 钱宝琮. 汪莱衡斋算学述评. 国立浙江大学科学报告，1936，2(1)：1～24；钱宝琮科学史论文选集，北京：科学出版社. 1993. 235～260

158 严敦杰. 伟大出于平凡—数学理论家汪莱. 人民日报，1958-06-02(8)

159 钱宝琮. 汪莱《衡斋算学》的一个注记. 科学史集刊，1984，11：12～13

160 李兆华. 汪莱《参两算经》校释. 天津师大学报(自然科学版)，1985年数学专辑，59～64

161 李兆华. 汪莱《递兼数理》、《参两算经》略论. 中国数学史论文集(二). 1986. 65～83

162 Zhao-Hua, Li 李兆华. Wang lai's 汪莱 Recherch on Numbers Systemes of Variable Base. In: Science and Techology in Chinese Civilization (Ed. by Cheng-Yih Chen). Singapore: World Scientific Publishing Co. PteLtd, 1987, 87～92

163 李兆华. 汪莱方程论研究. 自然科学史研究，1992，11(3)：193～208

164 李兆华.《衡斋算学》第二册研究. 数学史研究文集，第三辑. 1992. 78～82

165 李迪. 清代著名数学家汪莱及其数学成就. 数学传播，1993，17(3)：54～62

166 汪宜楷，汪晓菡. 清代著名数学家汪莱. 安徽师大学报(自然科学版)，科技史研究专辑，1993，50～53

167 郑坚坚. 汪莱年谱. 中国科技史料，1994，15(3)：24～34

168 李兆华. 汪莱球面三角成果讨论. 自然科学史研究，1995，

14(3)：262～273
169 汪宜楷．汪莱年谱．谈天三友，1993，333～353
170 汪宜楷、汪晓菡．汪莱出生年月辨正．中国科技史料，1996，17(4)：29～32
[李锐]
171 陈左高．述清数学家李锐《观妙居日记》未刊稿．学林漫录初集．1980年6月．254～256
172 郭世荣．李锐《观妙居日记》研究．文献，第2期．1986，248～263
173 吴裕宾．清代中期著名数学家李锐．中等数学(天津)，1988(1)：39转47
174 刘钝．李锐与笛卡儿符号法则．自然科学史研究，1989，8(2)：127～137
175 朱家生．李锐高次方程数值解法新探．扬州师院学报(自然科学版)，1989(3)：14～18
176 朱家生．李锐《开方说》方程理论初探．明清数学史论文集．295～316
177 严敦杰．李尚之年谱．同上．445～472

(五) 董祐诚、项名达和戴煦

[董祐诚、项名达]
178 李兆华．董祐诚的垛积术与割圆术述评．中国数学史论文集(三)．1987．94～112
179 甘向阳．清代数学家董祐诚及其《割圆连比例图解》．数学通报，1992(3)：46～47
180 牛亚华．项名达的椭圆求周术研究．内蒙古师大学报(自然科学版)，1990(3)：53～61
181 特古斯．《象数一原》中的卡塔兰数．数学史研究文集，第二辑．1991．105～112

182　甘向阳．项名达递加数与牛顿二项式定理．湘潭师范学院学报(自然科学版)，1991，12(3)：1～7
183　柴慧琤．项名达数学思想述评．自然科学史研究，1992，11(2)：120～126
184　特古斯．项名达构造递加数的方法分析．数学史研究文集，第三辑．1992．83～89
185　何绍庚．项名达数学成就述略．见：科史薪传．沈阳：辽宁教育出版社，1997，153～164
[戴煦]
186　李兆华．戴煦关于二项式和对数展开式的研究．中国数学史论文集(一)．1985．98～108
187　李兆华．戴煦关于对数研究的贡献．自然科学史研究，1985，4(4)：353～362
188　罗见今．戴煦数．内蒙古师大学报(自然科学报)，1987(2)：18～22
189　郭世荣，罗见今．戴煦对欧拉数的研究．自然科学史研究，1987，6(4)：362～371
190　罗见今．与欧拉数相匹配的特殊函数——戴煦数．数学史研究文集，第一辑．1990．131～140
191　韩琦．《数理精蕴》对数造表法与戴煦的二项展开式研究．自然科学史研究，1992，11(2)：109～119
192　甘向阳．戴煦《外切密率》对级数的认识．湘潭师范学院学报(自然科学版)，1992，13(3)：1～6
193　王荣彬．戴氏系列数．数学传播，1993，17(3)：44～53
194　王荣彬．戴煦关于二项式定理的研究．通向现代科学之路的探索．呼和浩特：内蒙古大学出版社，1993．104～109
195　王荣彬．戴煦“假设对数”辨析．西北大学学报(自然科学报)，1994(3)：271～274

196 Wang Rongbin. An Outline of Dai Xu's Mathematics Achivement. Chinese Quartery Journal of Mathematics, 1995, 10(3): 1～8

（六）李善兰及其工作

[李善兰的生平及著述]

197 李俨. 李善兰年谱. 清华学报, 1928, 5(1): 1625～1651; 中算史论丛. 第四集. 331～361

198 顾颉刚、陈槃. 天算大家海宁李善兰的著述.（中山大学）图书馆报, 1929, 7(4): 15～22

199 毛子水. 李善兰—清代末年的一位中国算学家. 大公报(沪版), 1947-01-11 自然科学第 14 期.

200 李俨. 李善兰年谱补遗. 学艺, 1947, 17(6): 30～31

201 李迪. 十九世纪中国数学家李善兰. 中国科技史料, 1982, 3(3): 15～21

202 李迪. 试论李善兰的爱国思想. 光明日报, 1983-10-19(3)

203 王渝生. 李善兰: 中国近代科学的先驱者. 自然辩证法通讯, 1983, 5(6): 59～72

204 陈忠祥. 中国近代科学的先驱李善兰. 人物, 1987(6): 162～165

205 Li Zhao-Hua 李兆华. A Study of the Mathematical Works of Li Shan-Lan 李善兰. In: Science and Technology in Chinese Civilization. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte Ltd, 1987, 109～128

206 J. -C. Martgloff. Li Shanlan, mathematicien chinois traditionnel, Science, Numero 127 27F, 1988, 48～57

207 王渝生. 李善兰研究. 明清数学史论文集. 334～408

208 严敦杰. 李善兰年谱订正及补遗. 同上. 473～479

209 李迪. 有关李善兰的一些新史料. 数学史研究文集, 第一辑.

1990. 140～148

210 洪万生. 从两封信看一代畴人李善兰. 第二届科学史研讨会汇刊. 台北，1991，217～223

211 洪万生. 王韬日记中的李善兰. 科学史通讯，1991，10：9～15

212 洪万生. 同文馆算学教习李善兰. 见：近代中国科技史论集. 台北，1991. 215～260

213 洪万生. 李善兰致曾国藩的两封信. 科学史通讯，1992，11：36～37

214 J. -C. Martzloff. Li Shanlan and Chinese Traditional Mathematics. The Mathematical Intelligencer，14，1992，32～37

215 洪万生. 墨海书馆时期(1852—1860)的李善兰. 中国科技史论文集. 台北：联经事业出版公司，1995. 223～235

[李善兰研究工作研究]

216 李善兰著，汪远昆绘图. 弧矢启秘图解. 国学(国学昌明社)，1913年，2期1～6，3期1～4，4期1～4

217 章用. 垛积比类疏证. 科学，23(11)：647～663

218 P. Turan. A Kinai mathematika trenének egy Problematika，Mathematikai Lapok Vol. 5，1954. 1～6

219 J. Suranyi. Megjegyzesekakinai mathematika törtenek egy Problemajehoz，Mathematikai Lapok vol. 6，1955，30～35

220 L. Carlitz，A Kinai mathematika trenetenek egy Problemajarol，Mathematikai Lapok，vol. 6，1955，219～220

221 J. Kaucky. O Jednom Problekmu z Dějin Činské，Mathematicko Fyzikany Casopis Sov，vol. 6，1963，32～40

222 罗见今.《垛积比类》内容分析. 内蒙古师院学报(自然科学版)，1982(1)：95～105

223 傅庭芳. 简介李善兰和“垛积差分”. 世界科学，1982(7)：45～46

224 罗见今. 李善兰恒等式的导出. 内蒙古师大学报(自然科学版)，1982(2)：42～51

225 罗见今. 李善兰对斯特林数和欧拉数的研究. 数学研究与评论，1982，2(4)：173～182

226 王渝生. 李善兰的尖锥术. 自然科学史研究，1983，2(3)：266～288

227 王渝生. 李善兰尖锥术中的解析几何思想. 见：科学传统与文化. 西安：陕西科学技术出版社，1983. 267～278

228 刘钝. 别具一格的图解弹道学——介绍李善兰的《火器真诀》. 力学与实践，1984(3)：60～63

229 马[①] 兹洛夫著，罗见今译. 李善兰的有限和公式. 科学史译丛，1983(2)：1～7

230 李兆华. 尖锥术及其与乘方垛关系之探讨. 辽宁师范大学学报(自然科学版)，1984(1)：107～116

231 傅庭芳.《垛积比类》与垛积差分. 世界科学，1984(3)：27～31

232 李兆华. 李善兰的垛积运算之探讨. 天津师大学报(自然科学版)，1985 数学专辑. 65～78

233 傅庭芳. 朱世杰与李善兰在垛积上的成就. 中国数学史论文集(二). 1986. 84～98

234 李文林，袁向东. 李善兰的尖锥求积术. 同上. 99～106

235 李兆华. 李善兰垛积术与尖锥术略论. 西北大学学报(自然科学版)，1986(4)：109～125

236 刘钝. 从徐光启到李善兰——以《几何原本》之完璧透视明

① “马”，译文印刷时误为“乌”。

清文化. 自然辩证法通讯，1989(5)：55～63
237 严敦杰. 李善兰恒等式. 明清数学史论文集. 1990. 409～420
238 骆祖英，汪晓勤. 李善兰《方圆阐幽》研究. 浙江师范大学学报(自然科学版)，14(1)：1991，38～47
239 洪万生. 李善兰与《几何原本》后九卷. 科学史通讯，1990，9：30～31
240 张素亮、韩祥临. 李善兰与牛顿早期微积分思想的比较. 曲阜师范大学学报(自然科学版)，1991，17(2)：102～106
241 罗见今. 李善兰的《垛积比类》是早期组合数学的杰作. 数学史研究文集，第三辑. 1992. 90～99
242 冯立升，牛亚华. 李善兰对椭圆及其应用问题的研究. 同上. 100～111
243 李兆华. 李善兰对数论研究. 自然科学史研究，1993，12(4)：333～343

(七)"长沙学派"及其同时代的数学家

["长沙学派"]

244 钱宝琮. 曾纪鸿圆率考真图解述评. 数学杂志，1939，2(1)：102～109
245 李文铭. 黄宗宪对孙子定理和求一术的证明. 陕西师大学报(自然科学版)，1986(3)：82～87
246 许康. 一篇算学蔚成家——纪念曾纪鸿诞生140周年. 中国科技史科，1988，9(2)：45～51
247 许康，廖杰初. 近代最早赴欧的数学家黄宗宪身世述略. 同上，1990，11(2)：35～44
248 李兆华. 时曰醇《百鸡术衍》研究. 数学史研究文集，第二集，1991，123～132
249 李文铭. 黄宗宪对孙子定理和求一术预备性证明. 同上，112

～116
250 吴裕宾．我国第一部借贷计算论著—《粟布演草》．中国科技史料，1992，13(4)：14～23
251 许康．丁取忠和《白芙堂算学丛书》．同上，1993，14(3)：34～43
252 洪万生．古荷池精舍的算学新芽——丁取忠学圈与西方代数．汉学研究，1996，14(2)：135～158
253 王翼勋．一次同余式组的欧拉解法和黄宗宪反乘率新术．自然科学史研究，1996，15(1)：40～47
[其他数学家]
254 姚光．顾尚之先生传略．国学丛选，再版第六集．1923
255 洪万生．张文虎的舒艺室世界——一个数学社会史的取向．汉学研究，1993，11(2)：163～184
256 刘长春．夏鸾翔在椭圆计算上的若干贡献．内蒙古师大学报(自然科学版)，1986(2)：35～42
257 刘洁民．晚清著名数学家夏鸾翔．中国科技史料，1986，7(4)：27～32
258 刘钝．夏鸾翔对圆锥曲线的综合研究．见：第三届国际中国科学史讨论会论文集．北京：科学出版社，1990．12～18
259 刘洁民．关于夏鸾翔的家世及生平．中国科技史料，1990，11(4)：47
260 邹永祥．邹征君传稿．数学杂志，1922，13(六、七)．
261 李迪，白尚恕．我国近代科学光驱邹伯奇．自然科学史研究，1984，3(4)：378～390
262 梁家勉．现代数理科学的先行者邹伯奇．科学史论集．合肥：中国科学技术大学出版社，1987．
(八) 华蘅芳及其工作
263 叙五．书华若汀与徐雪村．中央日报，1935年10月31日，

第 16 版
264 钱基博. 华蘅芳传. 江苏教育，1935，4(5、6)：394～404
265 李俨. 华蘅芳年谱. 学艺，1948，18(2)：27～32
266 孙捷. 近代爱国数学家——华蘅芳. 历史学教学，1980(6)：42
267 杜正国. 清代数学家华蘅芳. 光明日报，1981-12-04 “科学” 70 期
268 罗见今. 清末数学家华蘅芳. 中国数学史论文集(一). 1985. 109～120
269 王渝生. 华蘅芳：中国近代科学的先行者和传播者. 自然辨证法通讯，1985(2)：60～79
270 罗见今. 华蘅芳的计数函数和互反公式. 中国数学史论文集(二). 1986. 107～124
271 罗见今. 华蘅芳的内插法. 内蒙古师大学报(自然科学版)，1989 年第 1 期科学史增刊，41～49
272 纪志刚. 华蘅芳《积较术》的矩阵算法思想. 内蒙古师大学报 (自然科学版)，1990 (2)：45～51
273 纪志刚. 稿本《合数术》研究. 数学史研究文集，第一辑. 1990. 162～169
274 纪志刚. 华蘅芳的有限差分研究. 数学史研究文集，第一辑. 1990. 149～161
275 张祖贵. 《数根丛草》研究. 自然科学史研究，1992，11(2)：127～138
276 Hong Wann－Sherg，Hua Heng fang(1833～1902) and His Notebook on Learning Mathematies－Xue Suan Bi Tan，Philosophy and the History of Science，1993，(2)，27～76
277 王桂芹，李敏.《学算笔谈》与华蘅芳的数学教育思想. 数学史研究文集，第四辑. 1993. 124～126

（九）清末数学家及其他

[清末数家及其工作]

278 李迪．曹汝英《增修欧氏几何》初论．数学史研究文集，第四辑．1999．55～59

279 李兆华．卢靖两稿本数学书跋．同上，第一辑．1990．170～171

280 那日苏．对知弥《一次不定方程解法》之研究．见：中国少数民族科技史研究，第一辑．呼和浩特：内蒙古人民出版社，1987，52～62

281 田淼．《一次不定方程解法》研究．见：第二届中国少数民族科技史国际会议论文集．北京：社会科学文献出版社，1996．132～136

282 吴裕宾，朱家生．刘彝程的数学教学与研究．扬州师院学报（自然科学版），1990，10(4)：33～40

283 田淼．清末数学家与数学教育家刘彝程．数学史研究文集，第三辑．1992．117～122

284 田淼．刘彝程垛积术研究．同上，第五辑．1993．70～81

285 陈训慈．桐乡劳玉初生生小传．文澜学报，第一集．1935．1～8

286 吕淑红．论劳乃宣现象．内蒙古师大学报（哲学社会科学版），1991(2)：134～138

287 王青建．《古筹算考释》研究．自然科学史研究，1998，17(2)：111～118

288 劳汉生，廖世发．周达《圆理奇侅》简析．科学技术与辩证法，1991(1)：43～46

289 李迪．我国现代数学的先驱者周达．中国科学技术史论文集（一）．255～275

290 李迪．中国现代数学的先驱——周达．科学月刊（台北），

1992，33(3)：219～224

291 李迪. 周达与中日数学交流.《中国科学史国际会议：1987京都シンポジウム》报告书. 京都：京都大学人文科学研究所出版，1992. 27～33

292 胡炳生. 周达的世家和业绩考略. 安徽师大学报(自然科学版)，1993“科学史研究专辑”，7～12

293 Hu Bingsheng(胡炳生). A Continuous Paper about Zhou Da and His Achivement in the Mathematical Cultural Exchange Betwen China and Japan. In：Proceedings of the Cultural History of Mathematics vol. 4，1994，91～98

294 张祖贵. 谭嗣同与数学. 中国科技史料，1991，12(1)：3～12

[文献史料]

295 李俨. 近代中算著述记. 图书馆学季刊，1928，2(4)：601～640；1929，3(2)：149～20；1929，3(3)：367～387；1929，3(4)：601～617；中算史论丛第二集

296 李俨. 清季陕西数学教育史略. 西京日报，1934-08-13连载；中算史论丛第四集. 1955. 321～330

297 李俨. 西陲中算史料之发现. 西京日报，1935-09-08“图书馆半月刊”五期

298 李培业. 清季陕西数学史料之补充. 西北大学校刊，1957-11-23

299 王重民著，李俨校. 清代文集算学类论文. 学风，1935，5(2)：1～8

300 钱宝琮. 浙江畴人著述记. 文澜学报，1937，3(1)：1～12

301 严敦杰. 上海算学文献述略. 科学，1939，23(2)：72～78

302 严敦杰. 四川天算艺文志略. 时事新报，1940-01-02，学灯66期，1940-01-08学灯67期

303 严敦杰. 清代四川算学著述记. 图书季刊，1941，新3(3、4)：227～244

304 李俨. 近代中算书目之编辑. 读书通讯57期，1943-01-01，16～17

305 严敦杰. 清光绪间蜀刻算书. 图书月刊，1943，2(7)：19～22

306 严敦杰. 四川通俗算书考. 时事新报，1943-09-07“学灯”242期，1943-09-16“学灯”243期，1943-09-23“学灯”244期

307 严敦杰. 蜀贤算学著述记. 图书季刊，1943，新4(3、4)：71～75

308 严敦杰.“清代学者著述表“算家著述校补. 益事报，1943-11-18“文史副刊”46期

309 骆祖英. 浙江数学家著述再记. 浙江师大学报(自然科学版)，1992(2)：22～32

[其他]

310 严敦杰. 稿本“中算斠”序目. 益世报，1943-03-16“文史副刊”29期

311 洪万生. 古法七乘方图的再兴. 科学月刊，1978，9(11)：18～25

312 胡著信. 镶符问题的历史渊源和现代发展. 中国数学史论文集(二). 1986. 56～64

313 吴裕宾.《中西算法大成》的编纂. 中国科技史料，1992，13(2)：91～94

314 萨仁图雅，苏瓦迪. 蒙古文“金钱卦”的数学模式. 见：第二届中国少数民族科技史国际会议论文集. 北京：社会科学文献出版社，1996，127～131

后 记

光阴似箭，日月如梭。从本大系策划开始，到现在差不多经过20个年头，调整后的正卷八卷即将出齐。此时此刻权以组织者的身份用“后记”形式说几句话，以表达我们的心情。我们的既定目标是对20世纪的中国数学史研究做一个总结(这一点并未明确宣布)，但是更具体的目的有七点，在第一卷“全书编写要求与方法”中写得很清楚。是否在客观上能达到这些目的，将由事实做出结论。

在全书即将出齐的今天，我们不禁回忆起当初及后来的情景。正当工作顺利进展的时候，操持此事的5人中先后有2人已离我们而去：1993年，西北大学李继闵教授英年早逝，良可惜也；仅过一年多的1995年3月，北京师范大学白尚恕教授也让病魔夺去了他的宝贵生命。白教授勤勤恳恳、任劳任怨地为创意、组织此事奔波工作，经多次修改，修订大系提纲40编。直到他临终时还挂念这部书的进展情况。他们的去世，使我们倍感悲痛。同时也有一个具体问题摆在了我们的面前：失去了双臂的《中国数学史大系》刚刚完成了两卷半，下一步怎么办?出版社于1996年10月，将沈康身和李迪邀到北京，对已成书稿进行会审、修改，特别是研究了下一步工作，把原来的计划略作调整，从原定十二卷改为正卷八卷、副卷二卷，加强和充实了写作力量，继续抓紧完成全书的撰写工作。经过5年的艰苦努力，正卷八卷即将全部摆在书架上了。当我们以喜悦的心情看到这些成果时，也不能忘记逝去

的两位长期合作者，现在可以告慰他们了。

先后参加本大系的撰写人员超过20人，他们中既有高龄的专家，也有中青年学术骨干，还有一些在读的博士生和硕士生。他们都认真负责地完成了各自的撰写任务，这是本大系能顺利完成的前提条件。在这里我们还要对执笔人之一、江苏常熟高等专科学校席振伟教授的不幸去世表示沉痛哀悼。我们愿意和所有为这套书付出劳动的编委和执笔者共庆本大系的胜利完成，分享喜悦。

任何书籍的出版，一般不是作者单方面的事，而是作者和出版者合作完成的。我们对出版者在文化传播方面的功绩，在书中曾多次结合历史实际有所论及。这部多卷本《中国数学史大系》的出版更体现了这一点。从开始达成合作时起，北京师范大学出版社就决定斥巨资保证出版，社领导与有关人员王文涌、林水平、张其友、潘淑琴等同志都一直非常关心每一步工作，并且多次把沈康身和李迪请到出版社，生活上给予优厚待遇和照顾，共同处理每一部书稿。在书籍的装帧和印刷方面，出版社下了很大功夫，典雅醒目、朴素大方、要素齐全，堪称上乘。

国家新闻出版署把这套书列入国家"八五"重点图书规划项目，这是对出版社和我们的有力支持和鼓舞。

作为一套几百万字的大书来说，我们实不敢奢望书中不存在瑕疵甚或大病，例如内容的取舍、各卷之间的衔接、对问题的理解、插图是否合适以及校对等方面，都可能有不妥或不适当之处，恳请广大读者惠予指正。还有一个很大的缺憾，即正卷八卷只到清末，民国以来的数学发展尚未涉及。我们设想，如有需要与可能，将来再版时，把各方面的宝贵意见采入修订本中，同时增补现代部分。

再者，限于条件，大系执笔者所见未周，中国数学史的研究方兴未艾，余绪正长，本大系只是对20世纪研究工作的总结，继往开来，正是广大读者的重要任务。

最后，我们向国家新闻出版署、北京师范大学出版社、全体执笔者和所有支持过本书的单位和个人表示谢意。

吴文俊　李迪　沈康身

2000 年 2 月 20 日